Høgskolen i Telemark
Avdeling for teknologiske fag

SLUTTPRØVE-OPPGAVE

FAG: A3894 Avansert reguleringsteknikk med programmering
LÆRER: David Di Ruscio

KLASSE: 2KIT	**DATO: 13.12.04**	**EKSAMENSTID: kl. 9.00-12.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende:	**Antall sider: 5 (inkl. forsiden)**	**Antall oppgaver: 2**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler:	**Vedlegg**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppgave 1 (30%)
(diskret optimalregulering: krysskoblinger i kriteriet)

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, &(1)\\ y_k &= Dx_k + Eu_k. &(2)\end{aligned}$$

Gitt et LQ kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2} y_N^T S y_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} [y_k^T Q y_k + u_k^T P u_k], \tag{3}$$

der $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$ er symmetriske vektmatriser.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved (3). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen.

b) Anta nå et optimalkriterium

$$J_i = \frac{1}{2}(r_N - y_N)^T S (r_N - y_N) + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} [(r_k - y_k)^T Q (r_k - y_k) + u_k^T P u_k], \tag{4}$$

der r_k er en referansevektor for målevektoren y_k.

Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (4) og med modellen (1) og (2) som bibetingelse. Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning og en differens ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen og differens ligningen.

Oppgave 2 (40%)
(Diskret LQ optimalregulering med integralvirkning)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en modell av formen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v, \tag{5}$$
$$y_k = Dx_k + w, \tag{6}$$

der v og w er konstante og ukjente forstyrrelser.
Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å designe en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}((y_k - r)^T Q(y_k - r) + \Delta u_k^T P \Delta u_k). \tag{7}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ og r er en konstant referansevektor. Q og P er symmetriske og positiv semidefinite matriser.

a) Vis at det er mulig å skrive modellen i (5) og (6) på endringsformen

$$\Delta x_{k+1} = A\Delta x_k + B\Delta u_k, \tag{8}$$
$$\Delta y_k = D\Delta x_k, \tag{9}$$

der

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta u_k = u_k - u_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}. \tag{10}$$

Hva er hensikten med dette ?

b) For å løse optimalreguleringsproblemet over så er det hensiktsmessig å skrive tilstandsrommodellen på en form som sammen med kriteriet i (7) danner et "standard LQ-optimalreguleringsproblem". Vis at modellen i (5) og (6) kan skrives på formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\Delta u_k, \tag{11}$$
$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \tag{12}$$

der

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix},\ \tilde{y}_k = y_k - r. \tag{13}$$

Du skal oppgi uttrykk for matrisene $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ og $\tilde{D}$. Merk: du kan her med fordel benytte modellen i (8) og (9) som utgangspunkt.

c) Modellen vi kom frem til i punkt 2b) og kriteriet i (7) danner et standard diskret LQ optimalreguleringsproblem av formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k, \quad (14)$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \quad (15)$$

med optimalkriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}(\tilde{y}_k^T Q \tilde{y}_k + \tilde{u}_k^T P \tilde{u}_k), \quad (16)$$

der vi for enkelthetsskyld har definert

$$\tilde{u}_k = \Delta u_k. \quad (17)$$

Utled eller sett opp den LQ optimale løsningen av formen

$$\tilde{u}_k = \tilde{G}\tilde{x}_k. \quad (18)$$

Løsningen består av

1. en diskret Riccati ligning
2. et uttrykk for regulatormatrisen $\tilde{G}$.
3. Sett deretter opp et utrykk for det aktuelle pådraget av formen

$$u_k = f(\cdot) \quad (19)$$

som skal benyttes til å regulere prosessen.

Tips: i punkt 1 og 2 over kan man benytte resultatene fra oppgave 1 med $E = 0$ dersom man ikke vil utlede det samme på nytt.

d) En PI regulator kan i Laplace-planet skrives som

$$u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}(r - y). \quad (20)$$

1. Sett opp en kontinuerlig tidsplanbeskrivelse (tilstandsrommodell) av PI regulatoren i (20).
2. Lag en diskret tidsplanbeskrivelse (tilstandsrommodell) av PI-regulatoren. Du kan her benytte eksplisitt Eulers metode.
3. Skriv den diskrete PI-regulatoren på endringsform og sammenlign med LQ-optimalregulatoren i punkt 2c).

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{21}$$

$$J = S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)dt \tag{22}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$H = L + p^T f \tag{23}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{24}$$

$$p(t_1) = \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} \tag{25}$$

Diskret optimalregulering

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, k) \tag{26}$$

$$J_i = S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \tag{27}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$H_k = L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) \tag{28}$$

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{29}$$

$$p_N = \frac{\partial S}{\partial x_N} \tag{30}$$

Derivasjonsregler

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qx) = Q^T, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q) = Q \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) = Qx + Q^T x \tag{32}$$

Løsningsforslag, sluttprøve A2202, 24/5-04

Oppg. 1

a) $$y_{k+1} - e_{k+1} = a(y_k - e_k) + bu_k + ae_k \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$y_{k+1} = ay_k + bu_k + e_{k+1} \qquad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$y_k - ay_{k-1} = bu_{k-1} + e_k \qquad (3)$$

Innfører $y_{k-1} = q^{-1}y_k$ og $u_{k-1} = q^{-1}u_k$ og får

$$\underbrace{(1 - aq^{-1})}_{A(q)} y_k = \underbrace{bq^{-1}}_{B(q)} u_k + e_k$$

Polynomene er da $$A(q) = 1 - aq^{-1} \qquad B(q) = bq^{-1} \qquad (4)$$

b) Fra (3) har vi at

$$y_k = ay_{k-1} + bu_{k-1} + e_n$$

som kan skrives slik

$$y_k = \underbrace{[y_{n-1} \;\; u_{k-1}]}_{\varphi_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta} + e_k$$

dvs.

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

c) Vi har

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (y_k - \varphi_k^T\theta)\Lambda(y_k - \varphi_k^T\theta)$$

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} -\varphi_k\Lambda(y_k - \varphi_k^T\theta)$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\Lambda y_k + \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\Lambda\varphi_k^T\right)\cdot\theta = 0$$

Dette gir OLS estimatet av θ

$$\underline{\underline{\hat{\theta}_N = \left(\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\Lambda\varphi_k^T\right)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\Lambda y_k}}$$

<u>Oppg. 2</u>

Fra (11) i oppg.-teksten har vi at

$$\sum_{k=1}^{t-1} y_k = (t-1)\bar{y}_{t-1}$$

Innsetter dette i (10) og får

$$\bar{y}_t = \frac{1}{t}\left((t-1)\bar{y}_{t-1} + y_t\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\bar{y}_t = \frac{t-1}{t}\bar{y}_{t-1} + \frac{1}{t}y_t}$$

Initialverdi $\bar{y}_1 = y_1$

$t = 2, 3, \dots$

dvs.

$$\underline{\underline{f_1(\cdot) = \frac{t-1}{t} \quad \text{og} \quad f_2(\cdot) = \frac{1}{t}}}$$

Oppg. 3

a)

- Kalmanfilter på innovasjonsform

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + \tilde{K}e_k \qquad (5)$$
$$y_k = \underbrace{D\bar{x}_k + Eu_k}_{\bar{y}_k} + e_k$$

som og kan skrives slik

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + \tilde{K}\big(y_k - \overbrace{(D\bar{x}_k + Eu_k)}^{\bar{y}_k}\big) \qquad (5b)$$

- Kalmanfilter på apriori-aposteriori form

$$\bar{y}_k = D\bar{x}_k + Eu_k \qquad (6)$$
$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K(y_k - \bar{y}_k) \qquad (7)$$
$$\bar{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \qquad (8)$$

- Sammenheng mellom de to formuleringene

Innsetter (7) i (8) og får

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + AK(y_k - \bar{y}_k) \qquad (9)$$

Sammenligner vi (9) med (5b) ser vi at

$\tilde{K}$ – kalmanfilter forsterkning i innovasjonsformen

K – — // — –//– i apriori-aposteriori formen

$$\underline{\underline{\tilde{K} = AK}}$$

b) Vi har

$$Y_{1|2} = O_L X_1 + H_L^d U_{1|2}$$

der

- $$Y_{1|2} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_K \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{K+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & & \end{bmatrix}, \quad X_1 = [x_1 \; x_2 \cdots x_K]$$

$$H_L^d = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & & \\ DB & E & \cdots & & 0 \\ DAB & DB & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ DA^{L-2}B & & & 0 & E \end{bmatrix}$$

og der $U_{1|2}$ er som $Y_{1|2}$.

- Vi har at

$$Z_{1|2} = Y_{1|2} U_{1|2}^{\perp} = O_1 X_1 U_{1|2}^{\perp}$$

der $U_{1|2} = I_K - U_{1|2}^T (U_{1|2} U_{1|2}^T)^{+} U_{1|2}$

SVD gir

$$Z_{1|2} = U S V^T = [U_1 \; U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_1 \; V_2^T] = U_1 S_1 V_1^T$$

$n = \text{rank}(Z_{1|2})$ = antall singulærverdier forskjellig fra null i $Z_{1|2}$ ($= \dim(S_1)$)

$O_L = U_1$ (utgangsnormal realisering

c)

$$Y = XB + E$$

Normal ligningene

$$X^T Y = X^T X B$$

Dersom $X^T X$ er inverterbar har vi

$$\underline{\underline{B_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T Y}}$$

Delprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering torsdag 23. oktober 2003 kl. 13.15-15.15

Delprøven består av: 3 oppgaver.
Oppgaven teller 40 % av sluttkarakteren.
Det er 4 sider i delprøven.
Tillatte hjelpemidler: vedlegg til oppgaven

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Kybernetikk og industriell IT
Institutt for elektro, IT og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (10%): Diverse spørsmål

Gitt et lineært og kontinuerlig system beskrevet med

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$
$$y = Dx + Eu, \tag{2}$$

der $x \in \mathbb{R}^n$ er systemets tilstandsvektor.

a) Definer styrbarhetsmatrisen. Hvordan kan vi basert på denne undersøke om systemet er tilstands styrbart?

b) Definer styrbarhets Gramian matrisen. Hvordan kan vi basert på denne undersøke om systemet er tilstands styrbart?

c)

- Beskriv en metode basert på et generalisert egenverdiproblem for å finne transmisjons-nullpunktene i et dynamisk system som gitt i (1) og (2).
- Finn nullpunktene til et system der

$$A = -1, \quad B = 2, \quad D = 1, \quad E = -0.5. \tag{3}$$

  basert på den generaliserte egenverdimetoden.

d) Finn systemets transfermatrise, $H(s)$, med utgangspunkt i tilstandsrom-modellen i (1) og (2) slik at

$$y(s) = H(s)u(s). \tag{4}$$

e) Beskriv kort hvordan man kan bestemme:

- systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.
- systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

med utgangspunkt i transfermatrisemodellen i (2).

Oppgave 2 (20%)
(Kontinuerlig LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven studere et kontinuerlig LQ optimalreguleringsproblem. Utgangspunktet er en prosess som vi modellerer med en kontinuerlig tilstandsrommodell av formen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$

$$y = Dx, \tag{6}$$

der initialtilstandsvektoren, $x(t_0)$, er kjent.

a) Anta at vi har gitt en objektfunksjon

$$J = \frac{1}{2}y(t_1)^T S y(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y^T Q y + u^T P u)dt. \tag{7}$$

- Utled og finn et uttrykk for det optimale pådraget, $u(t)^* \; \forall \; t_0 \leq t \leq t_1$, for prosessen i (5) og (6) som minimaliserer objektfunksjonen (7). Svaret skal bla bestå av en Riccatiligning med grensebetingelse.

b) Anta nå at kriteriet i (7) modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (y^T Q y + u^T P u)dt. \tag{8}$$

- Sett opp et uttrykk for det optimale pådraget i dette tilfellet. Hva er spesielt med regulatoren i dette tilfellet sammenlignet med regulatoren i punkt 2a) ?
- Hvilket krav har vi til systemmatrisene A, B og D samt vektmatrisene Q og P for at det optimalregulerte systemet skal være garantert stabilt ?

c) Anta nå at kriteriet er gitt ved

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} ((r-y)^T Q (r-y) + u^T P u)dt. \tag{9}$$

Finn et uttrykk for det optimale pådraget, u^*, for prosessen i (5) og (6) som minimaliserer denne objektfunksjonen (9).

Oppgave 3 (10%)
(Diskret LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en diskret modell av formen

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, && (10)\\
y_k &= Dx_k. && (11)
\end{aligned}
$$

Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å finne en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$
J_i = \frac{1}{2}x_N^T S x_N + + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}(x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k). \qquad (12)
$$

Q, P og S er symmetriske vektmatriser.

a) Utled og finn et uttrykk for det optimale pådraget, u_k^*, som minimaliserer kriteriet (12). Svaret skal bestå av et uttrykk for det optimale pådraget samt en diskret Riccati ligning.

b) Anta nå at tidshorisonten vi optimaliserer over er uendelig, dvs. $N \to \infty$. Hva blir nå løsningen på optimalreguleringsproblemet.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) && (13) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (14) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f && (15) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (16) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (17) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) && (18) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) && (19) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) && (20) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (21) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (22) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (23) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x && (24) \end{aligned}$$

Delprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk

Oppg. 1

a) Styrbarhetsmatrisen

$$C_n = [B \; AB \cdots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times r \cdot n}$$

der $n = \dim(x)$ og $r = \dim(u)$

Systemet er tilstandsstyrbart dersom

$$\mathrm{rang}(C_n) = n$$

b) Styrbarhetsgramian matrisen

$$W_c = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Systemet er tilstandsstyrbart dersom

$$\mathrm{rang}(W_c) = n \quad \text{og} \quad W_c > 0$$

c) Transmisjonsnullpunktene er gitt som de (endelige) generaliserte egenverdiene til problemet

$$|S - \lambda I_g| = 0$$

der

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix}, \quad I_g = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

der I_n er en $n \times n$ identitetsmatrise.

Tallverdier

$$|S - \lambda I_g| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 - 4 = 0$$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{\lambda = 3}}$ er systemets nullpunkt

d) Transfermatrisen er gitt, ved

$$H(s) = D(sI - A)^{-1} B + E \quad \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

og $m = \dim(y)$.

e) • Polpolynomet, $\pi(s)$, er gitt ved den minste felles nevner for alle underdeterminanter (som ikke er identisk like null) av alle ordner, av $H(s)$.

• Nullpunktspolynomet, $\rho(s)$, er gitt som den største felles divisor til underdeterminantene av orden, r_H, forutsatt at underdeterminantene er justert slik at de har $\pi(s)$ som nevner.

der $$H(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

$$r_H = \min(m, r)$$

Oppg. 2

a)

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_1) D^T S D x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x^T D^T Q D x + u^T P u) dt$$

$$H = \frac{1}{2}(x^T D^T Q D x + u^T P u) + p^T (Ax + Bu)$$

Pådrag

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Pu + B^T p = 0 \Rightarrow u = -P^{-1} B^T p$$

Antar $p = Rx$ og får

$$\underline{u^* = G \cdot x}$$

der $\underline{G = -P^{-1} B^T R}$

og R er løsn. av en Riccati-ligning.

Riccati ligningen

Maksimumsprinsippet gir

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(D^T Q D x + A^T p) = -D^T Q D \cdot x - A^T R \cdot x$$

Deriverer $p = R \cdot x$

$$\dot{p} = R\dot{x} + \dot{R} x$$

$$-D^T Q D x - A^T R x = \dot{R} x + R(Ax + B\underbrace{u}_{-P^{-1}B^T R x})$$

$$(\dot{R} + A^T R + RA - RBP^{-1}R + D^T Q D)x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + D^T Q D}$$

Grensebetingelse.

Maksimumsprinsippet gir

$$p(t_1) = \frac{\partial}{\partial x(t_1)}\left(\frac{1}{2}x^T(t_1)D^TS D\, x(t_1)\right) = D^TSD \cdot x(t_1)$$

Sammenligner med antagelsen, dvs

$$p(t_1) = R(t_1)\,x(t_1)$$

og får grensebetingelsen

$$\underline{\underline{R(t_1) = D^TSD}}$$

b) • Vendelig horisont, $t_1 \to \infty$, gir $\dot{R} = 0$ slik at R og $G = -P^{-1}B^TR$ blir konstante matriser. R blir da løsn. av den algebraiske Riccati ligningen.

$$A^TR + RA - RBP^{-1}B^TR + D^TQD = 0$$

og R er den positive løsningen.

• Systemmatrisen (A, B) må være <u>stabiliserbart</u> og matriseparet $(\sqrt{D^TQD}, A)$ må være <u>detekterbart.</u>

c)

$$H = \frac{1}{2}\left[(r-Dx)^T Q (r-Dx) + u^T P u\right] + p^T (Ax + Bu)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Pu + B^T p \Rightarrow u^* = -P^{-1}B^T p$$

Antar $\qquad p = Rx + h$

og dår $\qquad \underline{\underline{u = -P^{-1}B^T R \cdot x - P^{-1}B^T \cdot h}}$

der R er løsn. av Riccati ligningen og h er løsn. av en vektor differensial ligning.

<u>Utledning</u>

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(-D^T Q (r - Dx) + A^T p\right)$$

$$= +D^T Q r - D^T Q D \cdot x - A^T R x - A^T h$$

Deriverer antagelsen

$$\underset{\parallel}{\dot{p}} = \dot{R}x + R\dot{x} + \dot{h} \qquad\qquad -P^{-1}B^T R x - P^{-1}B^T h$$

$$+D^T Q r - D^T Q D x - A^T R x - A^T h \underset{\parallel}{=} \dot{R}x + R(Ax + Bu^*) + \dot{h}$$

$$(\dot{R} + A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + D^T Q D)x + \dot{h} + A^T h - RBP^{-1}B^T h - D^T Q r = 0$$

Dette gir

$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + D^T Q D = 0$$

$$-\dot{h} = (A - BP^{-1}B^T R)^T h - D^T Q r \quad , \qquad h(t_1) = -D^T S \cdot r(t_1)$$

Oppg. 3

a) Hamiltonfunksjonen

$$H_k = \frac{1}{2}(x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k) + p_{k+1}^T \overbrace{((A-I)x_k + B u_k)}^{x_{k+1} - x_k}$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = P u_k + B^T p_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow u_k^* = -P^{-1} B^T p_{k+1}$$

Antar $\quad p_k = R_k x_k$

Bedre uttrykk for pådraget

$$P u_k + B^T R_{k+1} x_{k+1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P u_k + B^T R_{k+1} (A x_k + B u_k) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(P + B^T R_{k+1} B) u_k = - B^T R_{k+1} A \cdot x_k$$

Dette gir

$$\underline{\underline{u_k = G_k \cdot x_k}}$$

der

$$\underline{\underline{G_k = -(P + B^T R_{k+1} B)^{-1} B^T R_{k+1} A}}$$

Riccati ligningen

Maksimumsprinsippet gir

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = -\left(Q x_k + (A^T - I)\, p_{k+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{p_{k+1}} - p_k = -Q x_k - A^T R_{k+1} x_{k+1} + \cancel{p_{k+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$p_k = Q x_k + A^T R_{k+1} \cdot (A x_k + B u_k)$$

Innsetter

$$R_k x_k = Q x_k + A^T R_{k+1} A x_k - A^T R_{k+1} B (P + B^T R_{k+1} B)^{-1} B^T R_{k+1} A \cdot x_k$$

$$\Downarrow$$

Må gjelde for alle x_k og får den diskrete Riccati ligningen

$$\underline{R_k = Q + A^T R_{k+1} A - A^T R_{k+1} B (P + B^T R_{k+1} B)^{-1} B^T R_{k+1} A}$$

Grensebetingelse

$$p_N = \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{2} x_N^T S x_N\right) = S x_N$$

Sammenligner med antagelsen, $p_N = R_N \cdot x_N$, og får

$$\underline{\underline{R_N = S}}$$

b) Når tidshorisonten er uendelig vil, $R_{k+1} = R_k$ og vi får at G_k og R_k er konstante matriser slik at

$$u_k^* = G x_k$$

der

$$G = -(P + B^T R B)^{-1} B^T R A \quad (= \text{konstant})$$

og R er den positive løsningen av den diskrete algebraiske Riccatiligningen (DARE), dvs.

$$\underline{R = Q + A^T R A - A^T R B (P + B^T R B)^{-1} B^T R A}$$

eller

$$R = Q + A^T (R - R B (P + B^T R B)^{-1} B^T R) A$$

Merk

Når $N \to \infty$ har ikke S noen betydning slik at vi kan sette $S = 0$ og kriteriet blir

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k)$$

Høgskolen i Telemark

Avdeling for teknologiske fag

EKSAMENSOPPGAVE

FAG: A3894 Avansert reguleringsteknikk **LÆRER: David Di Ruscio**

KLASSE: 2PA (valgfag)	**DATO: 14.12.99**	**EKSAMENSTID: kl. 9.00-13.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende:	**Antall sider: 3 (inkl. forsiden)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler:	**Kalkulator**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppgave 1 (35%)
(kontinuerlig optimalregulering)

Anta en prosess beskrevet med modellen

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{1}$$

a) Finn pådraget $u(t)$ som minimaliserer kriteriet

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)Sx(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^TQx + u^TPu)dt \tag{2}$$

med modellen (1) som bibetingelse.

b) Anta nå at kriteriet endres til

$$J = \frac{1}{2}x^T(t+T)Sx(t+T) + \frac{1}{2}\int_{t}^{t+T}(x^TQx + u^TPu)d\tau \tag{3}$$

der T er en tidshorisont.

Hva blir nå løsningen på optimalreguleringsproblemet ? Dvs., finn pådraget $u(t)$ som minimialiserer kriteriet (3) med modellen (1) som bibetingelse.

c)

- Hva blir minimumsverdien av kriteriet for de to løsningene i henholdsvis punktene a) og b) over?
- Hvilke krav er det normalt å stille til vektmatrisene i et LQ kriterium som benyttet over ? Begrunn svaret.

d)

- Diskuter eventuelle forskjeller mellom de to pådragene som funnet i punktene a) og b).
- Anta nå at vi har to prosesser. Den ene er en batch prosess. Den andre er en kontinuerlig prosess. Hvilken av strukturene i punktene a) og b) vil du benytte til å regulere batch prosessen ? Hvilken vil du benytte til å regulere den kontinuerlige prosessen ? Begrunn svaret.

Oppgave 2 (40%)
(diskret optimalregulering)

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Cr_k, \tag{4}$$
$$y_k = Dx_k. \tag{5}$$

Gitt et lineær kvadratisk (LQ) kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2}(r_N - y_N)^T S_N (r_N - y_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[(r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k) + u_k^T P_k u_k], \tag{6}$$

der $S_N \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vektmatriser og r_k er en kjent referansevektor for utgangsvektoren y_k.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (6) og med modellen (4) og (5) som bibetingelse. Løsningen skal bestå av:

- Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
- En Riccati ligning og en differens ligning.
- Grensebetingelser for Riccati ligningen og differens ligningen.

b) Anta nå at prosessen er beskrevet med den diskrete tilstandsrommodellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{7}$$
$$y_k = Dx_k. \tag{8}$$

Anta at vi ønsker en optimal reguleringsstruktur som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (6), men at vi i tillegg ønsker integralvirkning.

Beskriv hvordan vi kan benytte resultatene i punkt a) til å lage en optimalregulator med integralvirkning for prosessen gitt ved ligningene (7) og (8).

c) Anta at tilstandsvektoren x_k ikke måles. Foreslå en løsning på problemet som består av en tilstandsestimator av Kalmanfiltertype. Hvordan kan vi sjekke stabiliteten til totalsystemet i dette tilfellet ? Vi forutsetter uendelig tidshorisont, dvs. slik at $N \to \infty$.

d) Vi ønsker å omskrive (skifte ut indekser i) kriteriet (6) slik at vi får et kriterium med glidende tidshorisont av lengde L sampler. Videre ønsker vi å finne minimum av dette kriteriet med modellen (7) og (8) som bibetingelse ved å løse et QP problem.

- Skriv opp kriteriet i dette tilfellet.
- Formulere løsningen på problemet som et QP problem (kvadratisk programmering). Dvs. vi ønsker å finne minimum av kriteriet som gitt i dette tilfellet og modellen i (7) og (8) som bibetingelse. Kan løsningen finnes analytisk ? Se bort fra andre bibetingelser.

Oppgave 3 (10%)

Gitt et system beskrevet ved modellen

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{9}$$

Problemet i denne oppgaven er å styre systemets tilstandsvektor $x(t)$ fra en gitt starttilstand $x(t_0)$ til en spesifisert slutt-tilstand $x(t_1)$ slik at kriteriet

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u^T P u dt \tag{10}$$

minimalseres. Vi forutsetter at $P > 0$ i kriteriet.

a) Beregn et uttrykk for pådraget $u(t)$ $\forall\ t_0 \leq t \leq t_1$ som løser problemet beskrevet over.

b) Hvilket krav har vi til at pådraget som funnet i punkt a) skal eksistere.

Oppgave 4 (15%)

Gitt et SISO system med en tilstand beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{11}$$
$$y = Dx \tag{12}$$

der u er systemets pådrag. y er en måling. Systemet skal reguleres slik at følgende lineære og lineær kvadratiske (LQ) kriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_{t}^{\infty} (y^T Q y + u^T P u) d\tau \tag{13}$$

minimaliseres.

a) Sett opp Hamiltonmatrisen, F, for det optimale systemet. Tips: Hamiltonmatrisen er systemmatrisen til det kanoniske systemet beskrevet av systemets optimale tilstandsvektor, $\dot{x}$, og systemets impulsvektor (eller co-tilstandsvektor), $\dot{p}$.

b) Anta at egenverdiene til det optimalregulerte (lukkede) systemet er gitt ved diagonalmatrisen Λ. Hvilken sammenheng er det mellom Hamiltonmatrisen, F, og systemets lukkede egenverdier gitt ved Λ ?

c) Anta nå et SISO system med en tilstand slik at $A = a$, $B = b$, $D = 1$, $Q = q$ og $P = p$ alle er skalare.

Anta at egenverdien til det optimalregulerte (lukkede) systemet spesifiseres til å være λ. Finn den vekt q som medfører at det lukkede systemet får egenverdien λ. Tips: vekten q blir en funksjon av λ, a, b og p.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) && (14) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (15) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f && (16) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (17) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (18) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) && (19) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) && (20) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) && (21) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (22) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (23) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (24) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x && (25) \end{aligned}$$

Avansert reguleringsteknikk
Eksamen 14. desember 1999

Oppg. 1

a)
$$u(t) = \overbrace{-P^{-1}B^T R(t)}^{G(t)} \cdot x(t)$$
der $R(t)$ er løsn. av

$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q \,, \quad R(t_1) = S.$$
Merk: $R(t)$ er tidsvarierende for $t_0 \leq t \leq t_1$.

b) Løsningen blir (omtrent identisk)
$$u(t) = \overbrace{-P^{-1}B^T R}^{G} \; x(t)$$
der
$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R \,, \quad R(t+T) = S.$$
Merk : $R = R(t)$ = konstant i dette tilfellet.

c) Til fellet a) : $J^* = \frac{1}{2} x^T(t_0) R(t_0) x(t_0)$

Til fellet b) : $J^* = \frac{1}{2} x^T(t) \cdot R(t) \cdot x(t)$

d) • Det spesielle med løsningen i b) er at tilbakekoplingen G er konstant.
Tilbakekoplingen i a) blir konstant dersom $t_1 \to \infty$.

- Løsningen i a) er hensiktsmessig for en batch-prosess.
  Løsningen i b) er hensiktsmessig for en kontinuerlig prosess

Oppg. 2

1. Optimalt pådragsvektor:

$$u_k = G_1 x_k + G_2 C r_k + G_3 h_{k+1} \qquad (1)$$

der

$$G_1 = -G_3 R_{k+1} A_k \qquad (2)$$

$$G_2 = G_3 R_{k+1} \qquad (3)$$

$$G_3 = -(P_k + B_k^T R_{k+1} B_k)^{-1} B_k \qquad (4)$$

2. Riccati- og differens-lign. for R_k og h_k.

$$R_k = D^T Q_k D + A_k^T R_{k+1} (A_k + B G_1) \qquad (5)$$

se også oppg. 1 lign. (5) - (7)

$$h_k = (A_k + B_k G_1)^T h_{k+1} - D^T Q_k r_k + A_k^T R_{k+1} (B_k G_2 + I) C \cdot r_k$$

3. Grensebetingelser

$$R_N = D^T S_N D$$

$$h_N = -D^T S_N r_N$$

2 b) En måte å innføre integralvirkning er å augmentere prosess modellen med en tilstandsvektor som beskriver regulatorens-integrator-tilstand, dvs

$$\dot{z}^c = r - y \Rightarrow \frac{z^c_{k+1} - z^c_k}{\Delta t} = r_k - y_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{z^c_{k+1}}{\Delta t}}_{z_{k+1}} - \underbrace{\frac{z^c_k}{\Delta t}}_{z_k} = r_k - y_k \Rightarrow \underbrace{\boxed{z_{k+1} = z_k + r_k - Dx_k}}_{\text{Regulator tilstand}} \quad (1)$$

Prosess modell

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2)$$
$$y_k = Dx_k \quad (3)$$

(1) og (2) gir

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ -D & I \end{bmatrix}}^{\tilde{A}_k} \overbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}}^{\tilde{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix}}^{B_k} u_k + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}^{C} r_k$$

$$y_k = \overbrace{\begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{D}} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Dette er av formen

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_k \tilde{x}_k + \tilde{B}_k u_k + C \cdot r_k \\ y_k &= \tilde{D} x_k \end{aligned}}$$

Denne modellen er av samme form som i oppg. 2 punkt a).

Tilsvarende kan kriteriet, lign. (9) i oppgave teksten, augmenteres med vekting av z_K og settes på "standardform".
Se kompendium s. 39 (kontinuerlig tilfelle).

c) Vi kan benytte en tilstandsestimator

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + K(y_k - D\bar{x}_k).$$

Pådraget beregnes da ved

$$u_k = G_1\bar{x}_k + G_2 C r_k + G_3 h_{k+1}.$$

Stabiliteten sjekkes ved å se på eg.verdier til totalsystemet (ser bort fra eksterne signaler), dvs.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Dx_k \\ u_k &= G\bar{x}_k \\ \bar{x}_{k+1} &= A\bar{x}_k + Bu_k + KD(x_k - \bar{x}_k) \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \bar{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BG \\ KD & A+BG-KD \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix}$$

• $\tilde{A}$ må ha egenverdier innenfor enhetssirkelen i det komplekse plan for at totalsystemet skal være stabilt.

• Merk: En transformasjon, $\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{T}\begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k - \bar{x}_k \end{bmatrix}$ gir

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \end{bmatrix} = T\tilde{A}T^{-1}\begin{bmatrix} x_k \\ x_k - \bar{x}_k \end{bmatrix} \quad \text{der}$$

$$T^{-1}\tilde{A}T \hat{=} T\tilde{A}T = \begin{bmatrix} A+BG & -BG \\ 0 & A-KD \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} n \text{ eg.verdier gitt ved } A+BG \\ \text{og } n \text{ ved } A-KD. \end{array} \right.$$

Vi setter $N = L-1+i$ og då

$$J_i = \frac{1}{2}(r_{L-1+i} - y_{L-1+i})^T S_{L-1+i}(r_{L-1+i} - y_{L-1+i})$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{L-1+i-1}\left[(r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k) + u_k^T P u_k\right].$$

Dette er ekvivalent med
(dersom vi velger i lik løpende tid k)

$$J_k = \frac{1}{2}(r_{L-1+k} - y_{L-1+k})^T S_{L-1+k}(r_{L-1+k} - y_{L-1+k})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L-1}\left[(r_{k+i-1} - y_{k+i-1})^T Q_{k+i-1}(r_{k+i-1} - y_{k+i-1}) + u_{k+i-1}^T P_{k+i-1} u_{k+i-1}\right]$$

Definerer vi

$$u_{k|L-1} = \left[u_k^T \;\; u_{k+1}^T \;\; \dots \;\; u_{k+L-2}^T\right]$$
$$r_{k|L} = \left[r_k^T \;\; r_{k+1}^T \;\; \dots \;\; r_{k+L-1}^T\right]^T$$
$$y_{k|L} = \left[y_k^T \;\; y_{k+1}^T \;\; \dots \;\; y_{k+L-1}^T\right]^T$$

osv.

kriteriet kan da skrives slik

$$J_k = \frac{1}{2}(r_{k|L} - y_{k|L})^T \tilde{Q}_1 (r_{k|L} - y_{k|L}) + \frac{1}{2} u_{k|L-1}^T \tilde{P} u_{k|L-1}$$
$$= \frac{1}{2}(r_{k+1|L-1} - y_{k+1|L-1})^T \tilde{Q}(r_{k+1|L-1} - y_{k+1|L-1}) \qquad (1)$$
$$+ \frac{1}{2} u_{k|L-1}^T \tilde{P} u_{k|L-1} + (r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k)$$

der

$$\tilde{Q}_1 = \text{blokkdiag}\left(\left[Q_k \; Q_{k+1} \cdots Q_{k+L-2} \; S_{k+L-1}\right]\right)$$
$$\hat{Q} = \text{blokkdiag}\left(\left[Q_{k+1} \cdots Q_{k+L-2} \; S_{k+L-1}\right]\right)$$
$$\tilde{P} = \text{blokkdiag}\left(\left[P_k \; P_{k+1} \cdots P_{k+L-2}\right]\right)$$

Siste del av kriteriet (1) påvirkes ikke av noen av pådragene i $u_{k|L-1}$. Vi benytter derfor bare de to første leddene, dvs.

$$\tilde{J}_k = \frac{1}{2}\left(r_{k+1|L-1} - y_{k+1|L-1}\right)^T \tilde{Q}\left(r_{k+1|L-1} - y_{k+1|L-1}\right) + u_{k|L-1}^T \tilde{P} u_{k|L-1} \qquad (2)$$

Vi kan nå finne minimum av $\tilde{J}_k$.
Sammenhengen mellom $y_{k+1|L-1}$ og $u_{k|L-1}$ finnes (er gitt) av modellen

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + C r_k,$$
$$y_k = D x_k.$$

Dette er et QP problem som kan løses analytisk. Modellen gir sammenhengen

$$\boxed{y_{k+1|L-1} = p + F u_{k|L-1}} \qquad (3)$$

der

$$p = O_L A x_k$$

$$F = \begin{bmatrix} DB & 0 & \cdots & 0 \\ DAB & DB & \cdots & 0 \\ \vdots & DAB & \ddots & \vdots \\ & & & DB \end{bmatrix}$$

Innsetter vi (3) i (2) får vi en kvadratisk funksjon av formen

$$\tilde{J}_k = u_{k|L-1}^T H u_{k|L-1} + 2f^T u_{k|L-1} + J_0 \quad (4)$$

Deriverer vi (4) (eller (2) med (3)) får vi at

$$\frac{\partial \tilde{J}_k}{\partial u_k} = \frac{1}{2}\left[-2F^T\tilde{Q}\left(r_{k+1|L-1} - y_{k+1|L-1}\right) + 2\tilde{P}u_{k|L-1}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-F^T\tilde{Q}(r - p - Fu) + \tilde{P}u = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(F^T\tilde{Q}F + \tilde{P}\right)u_{k|L-1} = F^T Q\left(r_{k+1|L-1} - p\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u^*_{k|L-1} = \left(F^T\tilde{Q}F + \tilde{P}\right)^{-1} F^T Q\left(r_{k+1|L-1} - p\right)$$

Oppg. 3

a) Løsn (se utledn s. 48 – 49 i kompendium)

$$u(t) = P^{-1} B^T e^{A^T(t_1 - t)} W_c^{-1} \left(x(t_1) - e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) \right)$$

der

$$W_c = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B P^{-1} B^T e^{A^T(t_1-\tau)} \, d\tau$$

er styrbarhetsgramianen (vektet med P^{-1}).

b)
- Systemet må være styrbart
- Styrbarhetsgramianen W_c må være ikke-singulær (inverterbar).

10

This optimal control problem can be solved by minimizing a quadratic performance index. Since $x(t_1)$ is specified it is redundant to include a final state weighting in the cost index (performance index). Hence, it make sense to let the final state weighting matrix $S = 0$. In order to simplify the solution, let $Q = 0$ also.[1] The resulting quadratic performance index is given by

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u^T P u dt. \tag{3.169}$$

Note that $u = 0 \ \forall \ t \in [t_0, t_1 >$ gives a minimum $J = 0$ when $P > 0$. However, this control does in general not drive the state to the specified final state $x(t_1)$. Hence, $u = 0$ is not a solution to our problem.

We will solve this optimal control problem by using the maximum principle. The Hamilton function is given by

$$H = \frac{1}{2}u^T P u + p^T(Ax + Bu). \tag{3.170}$$

The optimal control is determined from the condition $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, i.e.,

$$u = -P^{-1}B^T p, \tag{3.171}$$

where we have assumed that $P > 0$. Substituting the optimal control into the state and costate equations gives

$$\dot{x} = Ax - BP^{-1}B^T p, \tag{3.172}$$
$$\dot{p} = -A^T p. \tag{3.173}$$

As we can see, the choice $Q = 0$ has decoupled the costate equation from the state equation. Hence, the solution of the costate equation is simply

$$p(t) = e^{-A^T(t-t_1)}p(t_1) = e^{A^T(t_1-t)}p(t_1), \tag{3.174}$$

where, at this stage, $p(t_1)$ is unknown. Substituting this into the state Equation (3.172) gives

$$\dot{x} = Ax - BP^{-1}B^T e^{A^T(t_1-t)}p(t_1). \tag{3.175}$$

The solution of the state equation with the optimal control is given by

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) - (\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BP^{-1}B^T e^{A^T(t_1-\tau)}d\tau)p(t_1), \tag{3.176}$$

We can now find $p(t_1)$ from the equation obtained by evaluating (3.176) for $t = t_1$. Putting $t = t_1$ in (3.176) gives

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) - W_c(t_0, t_1)p(t_1), \tag{3.177}$$

where

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BP^{-1}B^T e^{A^T(t_1-\tau)}d\tau, \tag{3.178}$$

[1] In fact, as we will show, this problem has an analytical solution.

is defined as the *weighted controllability gramian*. The gramian is weighted because it depends upon the control weighting matrix P. Note that the *weighted controllability gramian* reduces to the standard *controllability gramian* when $P = I$ and $t_0 = 0$.

We have from (3.177) that the final costate is given by

$$p(t_1) = -W_c(t_0, t_1)^{-1}(x(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)), \tag{3.179}$$

provided $W_c(t_0, t_1)$ is non-singular. The costate $p(t)$ is then given by (putting (3.179) into (3.174) gives)

$$p(t) = -e^{A^T(t_1-t)}W_c(t_0, t_1)^{-1}(x(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)). \tag{3.180}$$

Substituting this into the expression for the optimal control, i.e. $u = -P^{-1}B^Tp$, gives the optimal control

$$u(t) = P^{-1}B^Te^{A^T(t_1-t)}W_c(t_0, t_1)^{-1}(x(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)). \tag{3.181}$$

if $W_c(t_0, t_1)$ is non-singular. Note that the optimal control (3.181) for single input systems is independent of the control weighting p. Since $u(t)$ is defined in terms of the inverse of the gramian $W_c(t_0, t_1)$ the optimal control exists for arbitrary $x(t_0)$ and $x(t_1)$ if and only if $\det(W_c(t_0, t_1)) \neq 0$. This corresponds to controllability of the plant. This means that if the system (A, B) is controllable then there exists a minimum-energy control to drive any $x(t_0)$ to any desired $x(t_1)$.

The control (3.181) is an open-loop control since $u(t)$ does not depend on the current state $x(t)$. It depends only on the initial and the final states (and time), and it can be precomputed and then applied for all t in $[t_0, t_1]$.

3.9.1 On the controllability gramian

Definition 3.1 (Weighted controllability gramian) *The weighted controllability gramian for the system (A, B) is defined as*

$$W_c(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BP^{-1}B^Te^{A^T(t-\tau)}d\tau \tag{3.182}$$

$$= \int_0^{t-t_0} e^{A\tau}BP^{-1}B^Te^{A^T\tau}d\tau, \tag{3.183}$$

where P is a non-singular weighting matrix.

Note that the gramian $W_c(t_0, t)$ only is dependent on the difference $t - t_0$. This means that $W_c(0, t - t_0) = W_c(t_0, t)$. This is the reason for the short-hand notation $W_c(t_0, t) = W_c(t - t_0)$ which sometimes is used.

It is useful to recognize the relationship between the gramian $W_c(t_0, t)$ and the solution of a matrix Lyapunov equation. We have the following proposition.

Proposition 3.1 *The weighted controllability gramian $W_c(t_0, t)$ can be computed from the solution of the Lyapunov matrix differential equation*

$$\dot{W} = AW + WA^T + BP^{-1}B^T \tag{3.184}$$

Oppg. 4

a) Vi har

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad F = \begin{bmatrix} A & -H \\ -\tilde{Q} & -A^T \end{bmatrix}$$

og der $H = BP^{-1}B^T$, $\tilde{Q} = D^TQD$

b) F har $2 \cdot n$ egenverdier, n av egenverdiene er identisk med egenverdiene til det lukkede systemet, $\Lambda = \lambda(A + BG)$ der $G = -P^{-1}B^TR$ og R er løsn. av $A^TR + RA - RHR + \tilde{Q}$

c) Vi har

$$F = \begin{bmatrix} a & -\frac{b^2}{p} \\ -q & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -h \\ -q & -a \end{bmatrix}$$

Egenverdien er gitt ved

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda - a & h \\ q & \lambda + a \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda + a) - hq = 0$$

For gitt λ har vi

$$q = \frac{(\lambda - a)(\lambda + a)}{h} = \frac{\lambda^2 - a^2}{b^2} \cdot p$$

[redacted]

Høgskolen i Telemark

Avdeling for teknologiske fag

EKSAMENSOPPGAVE

FAG: AVANSERT REGULERINGSTEKNIKK LÆRER: DAVID DI RUSCIO

KLASSE(R) **2PA Siv. Ing.**	**DATO** **18.12.98**	**EKSAMENSTID, fra-til** **0900 - 1300**	
Eksamensoppgaven består av følgende:	**Antall sider** **5**	**Antall oppgaver** **4**	**Antall vedlegg** **1**
Tillatte hjelpemidler:	**KALKULATOR**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppgave 1 (30%) Enkelt spørsmål

a) Hva menes med separasjonsteoremet ?

b) Hva menes med LQ regulator-estimator dualitet ? (sett opp en matrise-tabell).

c) Gitt systemet

$$y(s) = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & -\frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{s^2+s-4}{(s+2)(s+1)} & \frac{2s^2-s-8}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix}}^{H(s)} u(s) \tag{1}$$

- Bestem systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.
- Bestem systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

d) Gitt et system $\dot{x} = Ax + Bu$ og $y = Dx + Eu$ med matriser

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; E = e. \tag{2}$$

Vi skal her studere systemets transmisjonsnullpunkter ved hjelp av den generaliserte egenverdimetoden.

- For hvilke systemparametre e har systemet transmisjonsnullpunkter ?
- Bestem systemets transmisjonsnullpunkter som funksjon av e.

e)

- Gitt et LQ problem med optimalkriterium $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(x^TQx + u^TPu)dt$ med $P > 0$ og prosessmodell $\dot{x} = Ax + Bu$.
  Hvilke krav må stilles til matrisene A, B og Q for at det optimale tilbakekoplede systemet skal være garantert stabilt ?
- Gitt et LQ problem med optimalkriterium $J = \frac{1}{2}x_N^TSx_N + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}(x_k^TQx_k + u_k^TPu_k)$ med $P > 0$ og prosessmodell $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.
  Foreslå krav til A, B, Q og S slik at det optimale lukkede systemet blir stabilt.

f) Hvilke garanterte marginer har man:

1. i et LQ system ?
2. i et LQG system ?

Oppgave 2 (20%)
(kontinuerlig optimalregulering med følging)

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cr, \tag{3}$$

$$y = Dx, \tag{4}$$

og et LQ kriterium

$$J = \frac{1}{2}(r(t_1) - y(t_1))^T S(r(t_1) - y(t_1)) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[(r-y)^T Q(r-y) + u^T Pu]dt, \tag{5}$$

der $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ og $P \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vektmatriser og r er en kjent referansevektor for utgangsvektoren y.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J gitt ved (5). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor $u(t)$.
2. En Riccati-ligning og en differensial-ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati-ligningen og differensial-ligningen.

Oppgave 3 (20%)
(diskret optimalregulering: krysskoblinger i kriteriet)

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (6)$$
$$y_k = Dx_k. \quad (7)$$

Gitt et LQ kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2}x_N^T S_N x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[x_k^T Q_k x_k + 2x_k^T N u_k + u_k^T P_k u_k], \quad (8)$$

der $S_N \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vektmatriser og der $N \in \mathbb{R}^{n\times r}$ er en vektmatrise for krysskobling.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved (8). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning og en differens ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen og differens ligningen.

b) Anta nå en (proper) prosessmodell

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (9)$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k. \quad (10)$$

og et optimalkriterium

$$J_i = \frac{1}{2}x_N^T S_N x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[y_k^T y_k + u_k^T P_k u_k], \quad (11)$$

Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (11) og med modellen (9) og (10) som bibetingelse.

Oppgave 4 (20%)
(diskret optimalregulering: alternativ løsning)

Gitt det diskrete systemet

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{12}$$

der $k \geq 1$ er diskret tid og tilstandsvektorens initialverdi er $x_1 = 0$. Videre har vi at $x_k \in \mathbb{R}^n$ og $u_k \in \mathbb{R}^r$. Gitt et lineær kvadratisk (LQ) kriterium definert over tidshorisonten $1 \leq k \leq N$, dvs.

$$J_1 = \frac{1}{2}(y_N - Dx_N)^T S(y_N - Dx_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} u_k^T P_k u_k, \tag{13}$$

der $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vekt-matriser.
Merk: Det er ikke meningen å benytte maksimumsprinsippet i denne oppgaven.

a) Vis at x_N kan uttrykkes ved

$$x_N = C_{N-1}u_{1|N-1} \tag{14}$$

der C_{N-1} er en matrise og $u_{1|N-1}$ er en utvidet vektor av innganger/pådrag.
Merk: C_{N-1} og $u_{1|N-1}$ må oppgis.

b) Vis at optimalkriteriet J_1 kan uttrykkes ved

$$J_1 = \frac{1}{2}(y_N - Dx_N)^T S(y_N - Dx_N) + \frac{1}{2}u_{1|N-1}^T P u_{1|N-1}. \tag{15}$$

der P er en matrise som skal oppgis.

c)

- Finn de optimale pådrag som minimaliserer optimal kriteriet J_1 (gitt ved ligning (13)) med prosessmodellen (12) som bibetingelse.
- Oppgi eventuelle krav som må oppfylles for at løsningen skal eksistere.

d) Hva blir minimumsverdien av optimal kriteriet J_1 ?

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) && (16) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (17) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f && (18) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (19) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (20) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) && (21) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) && (22) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) && (23) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (24) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (25) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (26) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x && (27) \end{aligned}$$

Eksamen i fag Avansert reguleringsteknikk

18/12 -98

Oppgave 1

a) Litt forenklet betyr separasjonsteoremet at det er optimalt å ta tilbakekopling fra $\hat{x}$. Dvs.

$$u^*(t) = \overbrace{-P^{-1}B^T R(t)}^{G(t)}\hat{x}(t)$$

der $\hat{x}(t)$ - optimalt minimum varians (Kalman filter) estimat av x.

$G(t)$ - den optimale, deterministiske, tilbakekoplingsmatrisen, beregnet som om man kjente x.

- $\hat{x}$ og G beregnes separat (dvs. som to separate problemer

b) Optimal minimum varians estimering (problem) er dualt til optimal LQ regulering (problem)

Matriser i LQ reg. problem	Matriser i opt. est. problem
A	A^T
B	D^T
Q	$V = E(v v^T)$
P	$W = E(w w^T)$
G	$-K^T$
$A+BG$	$(A^T - D^T K^T)^T = A - KD$
R	$X = E((x-\hat{x})(x-\hat{x})^T)$
$-t$	t

c) Se øving 2b, oppgave 1. + løsn.

Polpolynom: $\underline{\underline{\pi(s) = (s+1)^2(s+2)}}$

Poler $\underline{\underline{s_1 = -1,\ s_2 = -1,\ s_3 = -2}}$

Nullpunktspolynom: $\underline{\underline{p(s) = s-2}}$

Nullpunkt $\underline{\underline{s_0 = 2}}$

d) Transmisjonsnullpunktene er gitt av de endelige generaliserte egenverdiane, dvs. røttane i den karakteristiske ligningen

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & e \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & -e \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-2)(-e) + 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -e \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(-e) + e - (+(\lambda-2)) = 0$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(-e) + e - \lambda + 2$$

$$= \lambda^2(-e) + (4e-1)\lambda - 4e + e + 2 = 0$$

$$= -e\lambda^2 + (4e-1)\lambda - 3e + 2 = 0$$

dvs

$$e\lambda^2 + (1-4e)\lambda + 3e - 2 = 0$$

- $e = 0 \Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

ɔ: Nullpunkt for $\lambda = 2$ når $e = 0$

- $\lambda^2 + \frac{1-4e}{e}\lambda + \frac{3e-2}{e} = 0$

- $e \to \infty \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

ɔ: $e \to \infty$ gir $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$

- Løsning av 2. gradsligningen gir $\lambda = \lambda(e)$, dvs.

$$\lambda = \frac{-(1-4e) \pm \sqrt{(1-4e)^2 - 4(3e-2)e}}{2e}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{4e - 1 \pm \sqrt{4e^2 + 1}}{2e}$$

e)

- $Q \geq 0$ betyr at vi kan finne en faktorisering $Q = D^T D$ (alternativt $Q = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q}$)
  Dette gir $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y^T y + u^T P u) \, dt$.

  Det optimale tilbakekoplede systemet er stabilt dersom
  - (A, B) er stabiliserbart
  - (D, A) eller $(\sqrt{Q}, A)$ er detekterbart.

- Dersom vi velger $\underline{S = R}$, dvs. løsningen til et LQ optimalt system med ∞ horisont,
  $$\tilde{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k)$$
  med $x_{k+1} = A x_k + B u_k$ som bibetingelse vil det gitte systemet være stabilt, forutsatt at
  (A, B) detekterbart,
  $D, A)$ stabiliserbart.

f)

1. forsterkningsmargin $\geq \frac{1}{2}$
   fasemargin $\geq 60°$

2. Ingen garanterte marginer.

Oppgave 2

Løsning

1) $u^*(t) = G_1(t) \cdot x - P^{-1} B^T \cdot h$

$G_1 = -P^{-1} B^T R$

der

2) $-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + D^T Q D$

$-\mathring{h} = (A + BG_1)^T h \pm (RC - D^T Q) r$

3) Grensebetingelser

$R(t_1) = D^T S D$ og $h(t_1) = -D^T S \cdot r(t_1)$

ect.

$-\mathring{h} = A^T h - RBP^{-1}B^T h + RC r - D^T Q r$

Oppgave 3 6)

a)

$$H_k = \frac{1}{2}\left(x_k^T Q_k x_k + 2x_k^T N u_k + u_k^T P u_k\right) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \quad \text{—} \quad // \quad \text{—} \quad + p_{k+1}^T\left((A-I)x_k + Bu_k\right) \quad (1)$$

1.) Optimalt pådrag.

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = N^T x_k + P u_k + B^T p_{k+1} = 0 \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{u_k^* = -P^{-1}(B^T p_{k+1} - N^T x_k)}} \quad (3)$$

~~Alternativ~~

Antar $\underline{p_{k+1} = R_{k+1} x_{k+1}}$ (4)

Setter (4) inn i (2) og får

$$N^T x_k + P u_k + B^T R_{k+1}(A x_k + B u_k) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(P + B^T R_{k+1} B) u_k = -(B^T R_{k+1} A + N^T) x_k$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{u_k^* = -(P + B^T R_{k+1} B)^{-1}(B^T R_{k+1} A + N^T) x_k}} \quad (5)$$

2) Riccati ligningen

Impulsligning

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = -\left(Q_k x_k + N u_k + (A^T - I) p_{k+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{p_{k+1}} - p_k = -Q_k x_k - N u_k - A^T p_{k+1} + \cancel{p_{k+1}}$$

$$\underline{p_k = Q_k x_k + A^T p_{k+1} + N u_k}$$

$$\Downarrow$$

$$R_k x_k = Q_k x_k + A^T R_{k+1} x_{k+1} + N u_k$$

$$= Q_k x_k + A^T R_{k+1}(A x_k + B u_k) + N u_k$$

Dette gir

$$R_k x_k = Q_k x_k + A^T R_{k+1} A x_k + (A^T R_{k+1} B + N) u_k$$

Setter inn u_k^* gitt i (5) (fordi dette "bare" er en funksjon av x_k), dvs

$$R_k x_k = Q_k x_k + A^T R_{k+1} A x_k - (A^T R_{k+1} B + N)(P + B^T R_{k+1} B)^{-1}(B^T R_{k+1} A + N^T) x_k$$

Denne må gjelde for alle $x_k \neq 0$, dvs. vi har at

$$\underline{R_k = Q_k + A^T R_{k+1} A - (A^T R_{k+1} B + N)(P + B^T R_{k+1} B)^{-1}(B^T R_{k+1} A + N^T)}$$

<u>Merk:</u> Denne er identisk med ligning (4.43) i kompendiumet når $N = 0$!

Vi kan og skrive

$$\underline{R_k = Q_k + A^T R_{k+1} A - (B^T R_{k+1} A + N^T)^T (P + B^T R_{k+1} B)^{-1}(B^T R_{k+1} A + N^T)}$$

3) <u>Grensebetingelser</u>

$$p_N = \frac{\partial}{\partial x_N}\left[\frac{1}{2} x_N^T S_N x_N\right] = S_N x_N$$

Sammenligner med $p_N = R_N x_N$ og får at

$$\underline{R_N = S_N}$$

dvs. vi har grensebetingelse for R_k ved slutt-tiden

Høgskolen i Telemark

Avdeling for teknologiske fag

EKSAMENSOPPGAVE

FAG: A3894 Avansert reguleringsteknikk **LÆRER: David Di Ruscio**

KLASSE: 2PA	**DATO: 14.12.00**	**EKSAMENSTID: kl. 9.00-13.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende:	**Antall sider: 3 (inkl. forsiden)**	**Antall oppgaver: 4**	**Antall vedlegg: 1**
Tillatte hjelpemidler:	**Kalkulator**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppgave 1 (15%)
(diskret optimalregulering)

a) Anta en prosess beskrevet med modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{1}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k. \tag{2}$$

Finn det pådraget, u_k, som minimaliserer kriteriet

$$J_k = x_{k+1}^T S x_{k+1} + y_k^T Q y_k + u_k^T P u_k, \tag{3}$$

der S, Q og P er vektmatriser.

b) Foreslå en mulig vektmatrise, S, og evt. tilleggsbetingelser, slik at det optimale pådraget funnet i punkt $1a$) er slik at det lukkede systemet er garantert stabilt.

c) Finn nå det optimale pådraget som minimaliserer kriteriet

$$J_k = x_{k+1}^T S x_{k+1} + (r_k - y_k)^T Q (r_k - y_k) + u_k^T P u_k. \tag{4}$$

Oppgave 2 (35%)
(diverse spørsmål)

a) Hva menes med separasjonsteoremet.

b) Hva menes med styrbarhetsgramianmatrisen.

c) Hva menes med dualitetsprinsippet, dvs. estimator og regulator dualitet. Besvar oppgaven med en tabell.

d) Hva menes med detekterbarhet og stabiliserbarhet ?

e) Anta et system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$
$$y = Dx, \tag{6}$$

som vi ønsker regulert med

$$u = G\hat{x}, \tag{7}$$

der $\hat{x}$ er ett estimat av x og gitt av en tilstandsestimator.

- Sett opp en tilstandsestimator for beregning av $\hat{x}$.
- Analyser stabiliteten til totalsystemet, dvs. vis hvordan egenverdiene til totalsystemet kan beregnes.

f) Hvilke marginer har man i ett LQ-optimalt reguleringssystem.

g) Beskriv kort prinsippet for prediktiv regulering i diskrete systemer.

Oppgave 3 (40%)
(diskret optimalregulering og prediktiv regulering)

Gitt et system beskrevet med

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, && (8)\\ y_k &= Dx_k + Eu_k. && (9) \end{aligned}$$

Systemet skal reguleres med en optimal-regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_k = x_{k+L}^T S_{k+L} x_{k+L} + \sum_{i=0}^{L-1} (y_{k+i}^T Q_{k+i} y_{k+i} + u_{k+i}^T P_{k+i} u_{k+i}). \quad (10)$$

der S_{k+L}, Q_{k+i} og P_{k+i} $\forall\ i = 0, \dots, L-1$ er vektmatriser. L er prediksjonshorisont.

a) Finn det optimale pådraget, u_k, som minimaliserer kriteriet (10). Benytt maksimumsprinsippet. Løsningen består av en Riccati ligning med grensebetingelse.

b) Innfør de utvidede vektorene, $y_{k|L}$ og $u_{k|L}$, og skriv om kriteriet i (10) slik at vi får et kriterium uten sum-tegn.

c) Finn ett alternativ uttrykk for det optimale pådraget som ble funnet i punkt 3a). Dette uttrykket kan finnes ved å minimalisere det alternative kriteriet som funnet i punkt 3b).

d) Finn ett uttrykk for minimumsverdien av kriteriet (10).

Oppgave 4 (10%)
(Multivariabel frekvensanalyse)

Gitt systemet beskrevet ved

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)^2} \\ \frac{-s(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{-s(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)^2} \end{bmatrix} u(s) \quad (11)$$

a) Bestem systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.

b) Bestem systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) && (12) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (13) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f && (14) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (15) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (16) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) && (17) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) && (18) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) && (19) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (20) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (21) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (22) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x && (23) \end{aligned}$$

b)

Vi setter måle-(utgangs) ligningen inn i 2. ledd i kriteriet. Dette gir

$$y_k^T y_k + u_k^T P u_k = (x_k^T D^T + u_k^T E^T)(D x_k + E u_k)$$

$$= x_k^T D^T D x_k + 2\, x_k^T D^T E u_k + u_k (P + E^T E) u_k$$

Definerer vi

$$Q_k = D^T D$$

$$N = D^T E$$

$$P := P + E^T E$$

blir kriteriet (11) av (standard) formen (8), dvs.

$$J_i = \frac{1}{2} x_N^T S_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left[x_k^T Q_k x_k + 2 x_k^T N u_k + u_k^T P u_k \right].$$

Løsningen på problemet blir som i a). men med vektmatriser som over.

Poeng En proper tilstandsrommodell gir opphav til kryssledd i kriteriet!

Oppgave 4

a)

$$k=1, \quad X_2 = AX_1 + BU_1 = \underline{BU_1}$$

$$k=2, \quad X_3 = AX_2 + BU_2 = A(AX_1 + BU_1) + BU_2$$

$$= A^2X_1 + ABU_1 + BU_2 = \underline{ABU_1 + BU_2}$$

$$X_4 = AX_3 + BU_3 = \underline{A^2BU_1 + ABU_2 + BU_3}$$

$$\vdots$$

$$k=N \quad X_N = A^{N-2}BU_1 + \cdots \; BU_{N-1}$$

Dette gir

$$X_N = \underbrace{\begin{bmatrix} A^{N-2}B & A^{N-3}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}}_{\overset{\text{def}}{=} C_{N-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{bmatrix}}_{U_{1|N-1}}$$

Dette gir

$$\underline{\underline{X_N = C_{N-1} U_{1|N}}}$$

der C_{N-1} og $U_{1|N-1}$ er som over.

b) Vi har at (benytter $U_{1|N-1}$ som def. i a),

$$U_{1|N-1}^T P U_{1|N-1} = [U_1^T \, U_2^T \cdots U_{N-1}^T] \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & P_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= [U_1^T P_1 \;\; U_2^T P_2 \cdots U_{N-1}^T P_{N-1}] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = U_1^T P_1 U_1 + U_2^T P_2 U_2 + \cdots U_{N-1}^T P_{N-1} U_{N-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} U_k^T P_k U_k$$

QED

c) Vi setter $x_N = C_{N-1} u_{1|N-1}$ inn i kriteriet (ligning (15) i oppgaven, dvs.

$$J_1 = \frac{1}{2}(y_N - DC_{N-1} u_{1|N-1})^T S (y_N - DC_{N-1} u_{1|N-1}) + \frac{1}{2} u_{1|N-1}^T P u_{1|N-1}$$

Betingelse for minimum, (nødvendig)

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_{1|N-1}} = -\frac{1}{2} C_{N-1}^T D^T 2 S (y_N - D C_{N-1} u_{1|N-1}) + \frac{1}{2} \cdot 2 P u_{1|N-1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(C_{N-1}^T D^T S D C_{N-1} + P) u_{1|N-1} = C_{N-1}^T D^T S y_N$$

Dette gir

$$\underline{\underline{u_{1|N-1}^* = (C_{N-1}^T D^T S D C_{N-1} + P)^{-1} C_{N-1}^T D^T S y_N}}$$

der $C_{N-1}^T D^T S D C_{N-1} + P$

- må være inverterbar.
- Tilstrekkelig betingelse for minimum er, $\frac{\partial^2 J_1}{\partial u_{1|N-1}} > 0$.

d) Minimumsverdien av J_1 får vi ved å sette det optimale pådrag $u_{1|N-1}^*$ inn i kriteriet, dvs

$$J_1^* = \frac{1}{2}(y_N - DC_{N-1} u_{1|N-1}^*)^T S (y_N - DC_{N-1} u_{1|N-1}^*) + \frac{1}{2} u_{1|N-1}^T P u_{1|N-1}$$

EKSAMEN I FAG AVANSERT REGULERINGSTEKNIKK TIRSDAG 2. JUNI 1997 Tid: kl. 9.00 - 13.00

Klasse: 1PA (regulering)
Eksamensoppgaven består av: 6 sider, 5 oppgaver, 1 vedlegg
Tillatte hjelpemidler: vedheftet vedlegg

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 61

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (ulineær dekobling)

Vi skal i denne oppgaven anta at en prosess kan beskrives med en ulineær modell av formen

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

der:

- tilstandsvektoren x kan måles
- u er en kontinuerlig pådragsvektor.

a) Anta en prosess beskrevet med den ulineære modellen

$$\dot{x} = -\frac{u}{(1+x)^2} \tag{2}$$

Foreslå et reguleringssystem for prosessen basert på ulineær dekobling. Anta at x^s er settpunkt for tilstanden x. Tegn blokkdiagram.

b) Anta en reaktor som kan beskrives med den ulineære modellen

$$\dot{x}_1 = u_1(u_2 - x_1) - 2x_1^2 \tag{3}$$

$$\dot{x}_2 = -u_1 x_2 + x_1^2 \tag{4}$$

Foreslå et reguleringssystem for prosessen basert på ulineær dekobling. Anta at x_1^s og x_2^s er settpunkt for henholdsvis x_1 og x_2. Tegn blokkdiagram.

Oppgave 2 (diskret optimalregulering)

Gitt det diskrete systemet

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \tag{5}$$

der $k \geq i$ er diskret tid og tilstandsvektorens initialverdi x_i er gitt.
Gitt et lineær kvadratisk (LQ) kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2} x_N^T S_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T P_k u_k), \tag{6}$$

der $S_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$ er symmetriske vekt-matriser.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (6). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En diskret Riccati ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen.

b) Hva blir minimumsverdien av optimal kriteriet ?

Oppgave 3 (diskret optimalregulering med følging)

Gitt den diskrete tilstandsrommodellen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + C r_k, && (7) \\ y_k &= D x_k. && (8) \end{aligned}$$

Gitt et lineær kvadratisk (LQ) kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2}(r_N - y_N)^T S_N (r_N - y_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}[(r_k - y_k)^T Q_k (r_k - y_k) + u_k^T P_k u_k], \qquad (9)$$

der $S_N \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ og $P_k \in \mathbb{R}^{r\times r}$ er symmetriske vektmatriser og r_k er en kjent referansevektor for utgangsvektoren y_k.

a) Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (9). Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning og en differens ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen og differens ligningen.

b) Anta nå at prosessen er beskrevet med den diskrete tilstandsrommodellen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, && (10) \\ y_k &= D x_k. && (11) \end{aligned}$$

Anta at vi ønsker en optimal reguleringsstruktur som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (9), men at vi i tillegg ønsker integralvirkning.

Beskriv hvordan vi kan benytte resultatene i punkt a) til å lage en optimalregulator med integralvirkning for prosessen gitt ved ligningene (10) og (11).

Oppgave 4 (systemteori)

Gitt en prosess beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{12}$$
$$y = Dx + Eu \tag{13}$$

med følgende modell-matriser

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

a) Forklar hva som menes med følgende begreper:

1. Styrbarhet og stabiliserbarhet.
2. Styrbarhetsmatrise. (Controllability Matrix).
3. Styrbarhetsgrammian (Controllability Grammian).

Er det noen sammenheng mellom *styrbarhetsmatrisen* og *styrbarhetsgrammianen* ?

b) Gitt prosessen (12) og (13) med matriser som i (14).
Bestem transfermatrisen $H(s)$ fra pådragsvektoren u til utgangsvektoren y.

c) Bestem transmisjonsnullpunktene til transfermatrisen $H(s)$ funnet i punkt 1b).

d) Gi en vurdering av systemets transmisjonsnullpunkter og betydningen av disse.

e) Vi ønsker å innføre en tilbakekopling:

$$u = G(y_s - y) + u_s,$$

der y_s er settpunkt for y og u_s er en off-set for u slik at det lukkede systemet blir av formen

$$\dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}\tilde{u},$$
$$y = D_{cl}x + E_{cl}\tilde{u}.$$

Finn uttrykk for A_{cl}, B_{cl}, D_{cl}, E_{cl} og $\tilde{u}$ uttrykt ved A, B, D, E, G, y_s og u_s.

Oppgave 5 (regulering og estimering)

a) Gitt en prosess-modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{15}$$

og et lineær kvadratisk kriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + u^T P u)dt. \tag{16}$$

Finn et uttrykk for den optimale pådragsvektoren u som minimaliserer kriteriet J.

b) Hva menes med dualitetsprinsippet ?

c) Anta nå at vi har en målevektor beskrevet med

$$y = Dx \tag{17}$$

i tillegg til prosess-modellen i ligning (15). Sett opp ligningene for en minimum variansestimator for tilstandsvektoren x.

d) Hva menes med separasjonsteoremet ?

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{18}$$
$$J = S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt \tag{19}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$H = L + p^T f \tag{20}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{21}$$
$$p(t_1) = \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} \tag{22}$$

Diskret optimalregulering

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, k) \tag{23}$$
$$J_i = S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \tag{24}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$H_k = L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) \tag{25}$$
$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{26}$$
$$p_N = \frac{\partial S}{\partial x_N} \tag{27}$$

Derivasjonsregler

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qx) = Q^T \tag{28}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) = Qx + Q^T x \tag{29}$$

Avansert reguleringsteknikk
Løsning eksamen 2. juni 1997

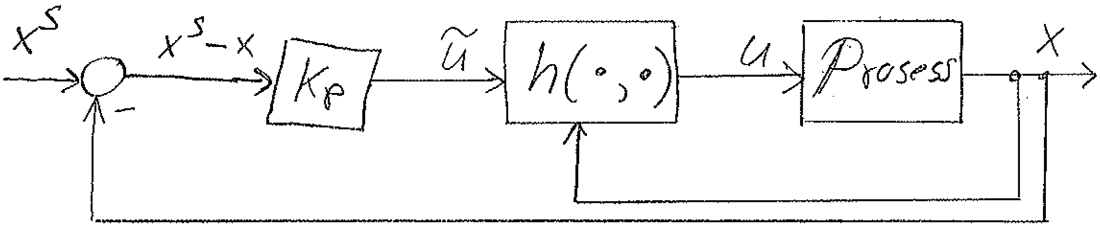
Oppg. 1

1a) $\dot{x} = \tilde{u}$ (ekvivalent pådrag)

gir $\tilde{u} = -\dfrac{u}{(1+x)^2} \Rightarrow \underline{\underline{u = -(1+x)^2 \cdot \tilde{u}}}$

Dersom vi velger å lukke sløyfa med en P-regulator får vi $\underline{\tilde{u} = K_p(x^s - x)}$

Blokkdiagram



der Prosess: $\dot{x} = -\dfrac{u}{(1+x)^2}$,

og

$$h(x, \tilde{u}) = -(1+x)^2 \cdot \tilde{u}.$$

Merk

Man kan godt benytte en PID regulator i stedet for P-regulatoren over, men dette er altså ikke nødvendig (for integralvirkning) i dette tilfellet.

7b) Beregner ekvivalente pådrag (f.eks.) slik:

$$\dot{x}_1 = \tilde{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_1 = u_1(u_2 - x_1) - 2x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = \tilde{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_2 = -u_1 x_2 + x_1^2$$

Dette gir følgende uttrykk for pådragene til prosessen (løser mht. u_1 og u_2):

$$\underline{\underline{u_1 = -\frac{1}{x_2}\left(\tilde{u}_2 - x_1^2\right)}} \qquad = h_1($$

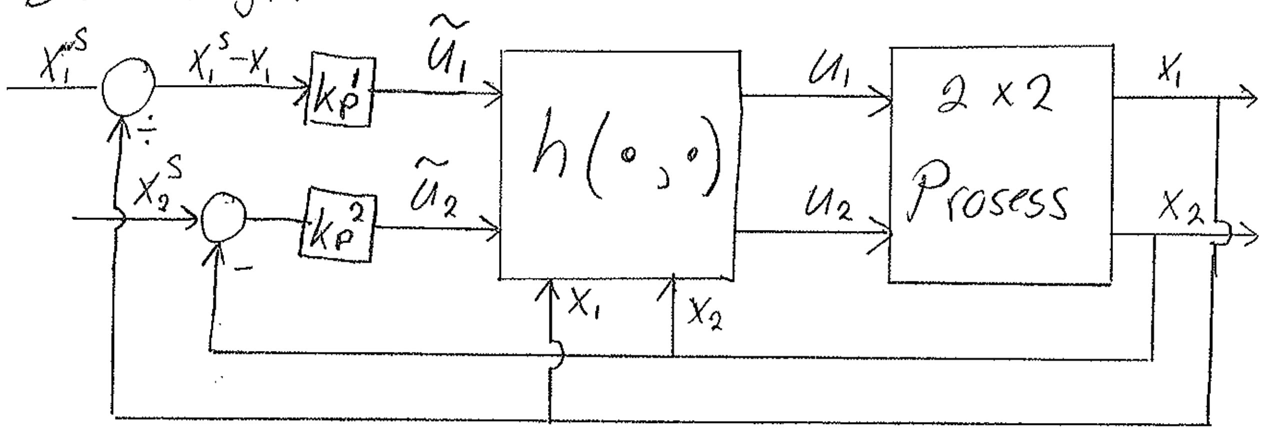
$$\underline{\underline{u_2 = x_1 + \frac{1}{u_1}\left(\tilde{u}_1 + 2x_1^2\right)}}$$

Sløyfene kan lukkes med (f.eks. 2) to P-regulatorer, dvs.:

$$\underline{\underline{\tilde{u}_1 = k_p^1\left(x_1^s - x_1\right)}}$$

$$\underline{\underline{\tilde{u}_2 = k_p^2\left(x_2^s - x_2\right)}}$$

Blokkdiagram



der

$$h(x, \hat{u}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2}\left(\hat{u}_2 - x_1^2\right) \\ x_1 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{x_2}\left(\hat{u}_2 - x_1^2\right)\right)}\left(\tilde{u}_1 + 2x_1^2\right) \end{bmatrix}$$

Oppg. 2

a)

1. Optimal pådragsvektor:

$$u_k = -P_k^{-1} B_k^T \cdot p_{k+1} \qquad (1)$$

der impulsvektoren kan skrives

$$p_{k+1} = A_k^{-T}(R_k - Q_k) x_k \qquad (2)$$

Denne løsningen krever at A_k og P_k kan inverteres. Alt. løsning

$$u_k = G_k \cdot x_k \qquad (3)$$

$$\underline{\underline{G_k = -(P_k + B_k^T R_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T R_{k+1} A_k}} \qquad (4)$$

2. Diskret Riccati ligning

$$\underline{\underline{R_k = Q_k + A_k^T R_{k+1} (I + B_k P_k^{-1} B_k^T R_{k+1})^{-1} A_k}} \qquad (5)$$

eller

$$R_k = Q_k + A_k^T (R_{k+1}^{-1} + B_k P_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k \qquad (6)$$

eller

$$R_k = (A_k + B_k G_k)^T R_{k+1} (A_k + B_k G_k) + G_k^T P_k G_k + Q_k \qquad (7)$$

der G_k er gitt i (4).

3. Grensebetingelse: $\underline{\underline{R_N = S_N}}$

b)

$$\underline{\underline{J_i^{min} = \frac{1}{2} x_i^T S_i x_i}}$$

Oppg. 3

1. Optimal pådragsvektor:

$$u_k = G_1 x_k + G_2 C r_k + G_3 h_{k+1} \qquad (1)$$

der

$$G_1 = -G_3 R_{k+1} A_k \qquad (2)$$

$$G_2 = G_3 R_{k+1} \qquad (3)$$

$$G_3 = -(P_k + B_k^T R_{k+1} B_k)^{-1} B_k \qquad (4)$$

2. Riccati- og differens-lign. for R_k og h_k.

$$R_k = D^T Q_k D + A_k^T R_{k+1} (A_k + B G_1) \qquad (5)$$

se også oppg. 1 lign. (5) - (7)

$$h_k = (A_k + B_k G_1)^T h_{k+1} - D^T Q_k r_k + A_k^T R_{k+1} (B_k G_2 + I) C \cdot r_k$$

3. Grensebetingelser

$$R_N = D^T S_N D$$

$$h_N = -D^T S_N r_N$$

3 b) En måte å innføre integralvirkning er å augmentere prosessmodellen med en tilstandsvektor som beskriver regulatorens-integrator-tilstand, dvs

$$\dot{z}^c = r - y \Rightarrow \frac{z^c_{k+1} - z^c_k}{\Delta t} = r_k - y_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{z^c_{k+1}}{\Delta t}}_{z_{k+1}} - \underbrace{\frac{z^c_k}{\Delta t}}_{z_k} = r_k - y_k \Rightarrow \underbrace{\boxed{z_{k+1} = z_k + r_k - D x_k}}_{\text{Regulator tilstand}} \quad (1)$$

Prosess modell

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k \quad (2)$$

$$y_k = D x_k \quad (3)$$

(1) og (2) gir

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_k & 0 \\ -D & I \end{bmatrix}}^{\tilde{A}_k} \overbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}}^{\tilde{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{B}_k} u_k + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}^{C} r_k$$

$$y_k = \overbrace{\begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{D}} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Dette er av formen

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_k \tilde{x}_k + \tilde{B}_k u_k + C \cdot r_k \\ y_k &= \tilde{D}\, x_k \end{aligned}}$$

Denne modellen er av samme form som i oppg. 3 punkt a).

Tilsvarende kan kriteriet, lign. (9) i oppgave teksten, augmenteres med vekting av z_k og settes på "standardform".

Se kompendium s. 39 (kontinuerlig tilstelle).

Oppg. 4

a)

1. Styrbarhet vil si at det eksisterer en pådragsfunksjon $u(t) \in t_0 \leq t \leq t_1$ slik at tilstandsvektorens initialverdi $x(t_0)$ styres til $x(t_1)$. (Se forøvrig kompendium).

Stabiliserbarhet vil si at alle ustabile tilstander i vektoren $x(t)$ er styrbare.

2. Styrbarhetsmatrise:

$$C_n = [B \ AB \cdots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times r \cdot n}$$

dersom $\underline{\text{rang}(C_n) = n}$ er (A,B) styrbart.

3. Styrbarhets Gramian

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \cdot d\tau$$

dersom $\underline{\text{rang}(W_c) = n \Rightarrow (A,B) \text{ styrbart}}$.

Se og kompendium lign. (1.24) som gir den funksjon $u(t)$ som styrer $x(t)$ fra $x(t_0)$ til $x(t_1)$ uttrykt med W_c^{-1}, dvs.

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1 - t)} W_c^{-1}(t_1)\left(e^{A(t_1 - t_0)} x(t_0) - x(t_1)\right)$$

kan i det diskrete tilfellet vise at

$$\underline{W_c = C_n \cdot C_n^T}$$

b) $H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E$

Vi har $\dot{x}_1 = -\frac{1}{4}x_1 + u_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{s+\frac{1}{4}}u_1$

$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_2 + u_2 \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}u_2$

Dette gir

$$y_1(s) = \frac{\frac{3}{4} - s}{s + \frac{1}{4}}u_1 + 4 \cdot u_2$$

$$y_2(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}u_2 - 6u_2 = \frac{-2(1+3s)}{s+\frac{1}{2}}u_2$$

dvs

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{4} - s}{\frac{1}{4} + s} & 4 \\ 0 & \frac{-2(1+3s)}{\frac{1}{2} + s} \end{bmatrix}}^{H(s)} \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

---

evt.

$$H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\frac{1}{4}} - 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{4} - s}{\frac{1}{4} + s} & 4 \\ 0 & \frac{-2(1+3s)}{s+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Vi kan og trekke at systemets pol-polynom

$$p(s) = \left(\tfrac{1}{2}+s\right)\left(\tfrac{1}{4}+s\right) = s^2 + \tfrac{3}{4}s + \tfrac{1}{8}$$

dvs.

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+s\right)\left(\frac{1}{4}+s\right)}\left[\begin{array}{c|c} \left(\frac{3}{4}-s\right)\left(\frac{1}{2}+s\right) & 4\left(s+\frac{1}{4}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right) \\ \hline 0 & -2(1+3s)\left(s+\frac{1}{4}\right) \end{array}\right]$$

c) Transmisjonsnullpunkter:

Vi kan her finne nullpunktene ved å løse $|H(s)| = 0$

dvs

$$|H(s)| = \frac{\left(\frac{3}{4}-s\right)(-2)(1+3s)}{\left(\frac{1}{4}+s\right)\left(\frac{1}{2}+s\right)} = 0$$

dvs,

$$\underline{\underline{s_1 = -\frac{1}{3} \quad \text{og} \quad s_2 = \frac{3}{4}}}$$

RHP nullpunkt.

d) • Systemet (A,B,D,E) har et transmisjons-nullpunkt i høyre halvplan, dvs $s_2 = \frac{3}{4}$.

• Transmisjons-nullpunktet vil generelt begrense systemets båndbredde. Det eksisterer f.eks. en øvre grense for K_p dersom systemet reguleres med to enkelt-sløyfe P-regulatorer, dvs. slik at systemet er stabilt.

• Se kompendium, "Prosess regulering".

4e) $$u = G(y_s - y) + u_s \qquad (1)$$

og $$y = Dx + Eu \qquad (2)$$

gir

$$y = Dx + EG(y_s - y) + Eu_s \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$(I + EG)y = Dx + [EG \,\vdots\, E]\begin{bmatrix} y_s \\ u_s \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \underbrace{(I+EG)^{-1}D}_{D_{cl}} \cdot x + \underbrace{(I+EG)^{-1}[EG \,\vdots\, E]}_{E_{cl}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_s \\ u_s \end{bmatrix}}_{\tilde{u}} \qquad (4)$$

Setter (1) inn i $\dot{x} = Ax + Bu$, dvs.

$$\dot{x} = Ax - BGy + BGy_s + Bu_s \qquad (5)$$

Setter (4) inn i (5), dvs.

$$\dot{x} = Ax - BG(I+EG)^{-1}Dx - BG(I+EG)^{-1}[EG \,\vdots\, E]\tilde{u} + [BG \;\; B]\begin{bmatrix} y_s \\ u_s \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = \overbrace{\left(A - BG(I+EG)^{-1}D\right)}^{A_{cl}} x$$

$$+ \underbrace{\left([BG \,\vdots\, B] - BG(I+EG)^{-1}[EG \,\vdots\, E]\right)}_{B_{cl}} \tilde{u}$$

Vi har

$$A_{cl} = A - BG(I+EG)^{-1}D$$

$$B_{cl} = [BG \,\vdots\, B] - BG(I+EG)^{-1}[EG \,\vdots\, E]$$

$$D_{cl} = (I+EG)^{-1}D$$

$$E_{cl} = (I+EG)^{-1}[EG \,\vdots\, E]$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} y_s \\ u_s \end{bmatrix}$$

<u>Merk</u>

$E=0$ gir som forventet

$$A_{cl} = A - BG, \qquad B_{cl} = [BG \quad B]$$

$$D_{cl} = D, \qquad E_{cl} = [0 \quad 0]$$

Oppg. 5

a) $u = -P^{-1}B^T R$

der R er løsn. av

$$A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q = 0$$

$$y^{min} = \frac{1}{2} x^T(0) R\, x(0)$$

b) Dualitetsprinsippet i forbindelse med optimal (LQ) regulerings- og estimerings-teori betyr bla. at

optimal minimum-varians estimering

er dualt til optimal LQ regulering.

Tabell

Matriser i LQ-opt. reg. problem	Matriser i opt. estimeringsproblem
A	A^T
B	D^T
Q	V
P	W
G	$-K^T$
$A+BG$	$(A^T - D^T K^T)^T$
R	X
$-t$	t

Dvs. Tabellen kan benyttes til å sette opp løsningen på estimeringsproblemet med utgangspunkt i reg. problemet / løsningen.

c)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - D\hat{x})$$

der

Tabell

$$G = -P^{-1}B^TR \Rightarrow -K^T = -W^{-1}DX$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{K = XD^TW^{-1}}}$$

der $X = E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T]$ er gitt ved

$A^TR + RA - RBP^{-1}B^TR + Q$

$\Downarrow$ Tabell

Ok, med $\underline{CVC^T}$ dersom
$\dot{x} = Ax + Bu + C \cdot v$
$y = Dx + w$

$$\underline{\underline{AX + XA - XD^TW^{-1}DX + V = 0}}$$

og W – kovariansmatrise til målestøy.
V – — ″ — til prosess-støy

Ikke nødvendig.

d) Separasjonsteoremet sier at dersom $x(t)$ ikke (eksakt) måles er det optimalt med en tilbakekobling $u = G(t) \cdot \hat{x}(t)$

der $\hat{x}(t)$: optimal minimum varians estimat av $x(t)$.

$G(t)$: LQ – optimal tilbakekoblingsmatrise.

HØGSKOLEN I TELEMARK

Avdeling for teknologiske fag

EKSAMENSOPPGAVE

FAG: Avansert reguleringsteknikk **LÆRER: David Di Ruscio**

KLASSE(R) **1PAR**	**DATO** **11/6-96**	**EKSAMENSTID, fra-til** **09.00 - 13.00**	
Eksamensoppgaven består av følgende:	**Antall sider** **5**	**Antall oppgaver** **5**	**Antall vedlegg** **1**
Tillatte hjelpemidler:	**Vedheftet vedlegg til eksamensoppgaven**		
KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG			

Oppgave 1

Gitt en prosess beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Dx + Eu \quad (2)$$

med følgende modell-matriser

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -3 & \frac{9}{2} \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

V **a)** Forklar hva som menes med følgende begreper:

1. Styrbarhet og stabiliserbarhet.
2. Styrbarhetsmatrise. (Controllability Matrix).
3. Styrbarhetsgrammian (Controllability Grammian).

Er det noen sammenheng mellom *styrbarhetsmatrisen* og *styrbarhetsgrammianen* ?

V **b)** Gitt prosessen (1) og (2) med matriser som i (3) og (4).
Er prosessen styrbar ?

V **c)** Gitt prosessen (1) og (2) med matriser som i (3) og (4).
Bestem transfermatrisen $H(s)$ fra pådragsvektoren u til utgangsvektoren y.

V **d)** Bestem transmisjonsnullpunktene til transfermatrisen $H(s)$ funnet i punkt 1c).

e) Vi ønsker å innføre en tilbakekopling:

$$u = Gx + u_c$$

slik at det lukkede systemet blir av formen

$$\dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}u_c$$

$$y = D_{cl}x + E_{cl}u_c$$

Finn A_{cl}, B_{cl}, D_{cl} og E_{cl} uttrykt ved A, B, D, E og G. Hva blir transmisjonsnullpunktene til det lukkede systemet ?

Oppgave 2

Gitt et system beskrevet med følgende lineære, kontinuerlige og tidsinvariante modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (5)$$

der $x(t_0 = 0) = x_0$ er tilstandsvektorens initialverdi, u er systemets pådragsvektor. Systemet ønskes regulert slik at følgende kvadratiske optimal-kriterium minimaliseres.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + u^T P u) dt \qquad (6)$$

V **a)** Bestem et uttrykk for pådraget, u, slik at optimal-kriteriet, ligning (6), minimaliseres.

V **b)** Hvilke krav må vi sette til matrisene A, B, P og Q for at det skal eksistere en optimal løsning og for at det optimale tilbakekoplede systemet skal være garantert stabilt ?

V **c)** Sett $Q = 0$ i den optimale løsningen funnet i punkt 1a) 2a) Finn egenverdiene til det lukkede systemet uttrykt ved hjelp av egenverdiene til A.

V **d)** Anta nå at optimalkriteriet modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + 2x^T N u + u^T P u) dt \qquad (7)$$

Finn nå den optimale tilbakekoplingen fra x til u.

V **e)** Anta nå at optimalkriteriet modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{2\alpha t}(x^T Q x + u^T P u) dt \qquad (8)$$

der α er en ikke-negativ konstant. Finn nå den optimale tilbakekoplingen fra x til u. Kan du si noe om egenverdiene til det lukkede systemet ?

V **f)** Hva menes med (LQ optimal) regulator-estimator dualitet ?

g) Anta nå at tilstandsvektoren x ikke er tilgjengelig og at denne estimeres i et Kalman-filter. Tilbakekoplingen settes til $u = G\hat{x}$ der G er den optimale regulator-matrisen funnet i punkt 2a) og $\hat{x}$ er den estimerte tilstandsvektoren. Vis at systemets dynamikk er beskrevet ved

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BG & -BG \\ 0 & A - KD \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Oppgave 3

Gitt den diskrete prosessen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{10}$$

der k er diskret tid og tilstandsvektorens initialverdi x_0 er gitt, samt et optimalkriterium

$$J = \frac{1}{2}x_N^T S x_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k) \tag{11}$$

a) Finn det optimale pådraget u_k for prosessen (10) som minimaliserer optimalkriteriet (11). (Hint: den diskrete Riccati-ligningen er en del av løsningen)

b) Diskuter eventuelle krav til modellmatrisene A og B samt vektmatrisene P, Q og S.

Oppgave 4

Gitt et system beskrevet med følgende lineære tidsinvariante modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12}$$

der $x(t_0) = x_0$ er tilstandsvektorens initialverdi, u er systemets pådragsvektor. Systemet ønskes regulert slik at følgende kvadratiske optimal-kriterium minimaliseres.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[(r-y)^T Q(r-y) + u^T P u]dt \tag{13}$$

der r er en referanse for systemets utgang y.

a) Bestem et uttrykk for pådraget, u, slik at optimal-kriteriet, ligning (13), minimaliseres.

b) Anta at $t_1 \to \infty$. Diskuter den optimale løsningen og tegn blokkdiagram.

Oppgave 5

Gitt et SISO system med en tilstand

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + bu_k & (14) \\ y_k &= x_k & (15) \end{aligned}$$

og et ett-skritts optimalkriterium

$$J = Q(y_{k+1} - r_{k+1})^2 + P\Delta u_k^2 \tag{16}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$. Q og P er skalare vekter.

a) Vis at modellen gitt ved ligningene (14) og (15) kan uttrykkes som en prediksjonsmodell av formen

$$y_{k+1} = p_1(k) + F_1 \Delta u_k \tag{17}$$

Skriv opp uttrykkene for $p_1(k)$ og F_1.

b) Sett prediksjonsmodellen funnet i punkt 5a) inn i optimalkriteriet (16) og finn den pådragsendring Δu_k som minimaliserer kriteriet.

c) Hva blir det stasjonære avviket

$$\lim_{k \to \infty} (y_k - r_k) \tag{18}$$

når pådraget $u_k = u_{k-1} + \Delta u_k$ påtrykkes systemet ? Δu_k er den optimale pådragsendringen funnet i punkt 5b). Begrunn svaret !

d) Forsøk å gi en stabilitets-analyse av det lukkede systemet.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{19}$$
$$J = S(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} L(x,u,t)dt \tag{20}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$H = L + p^T f \tag{21}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{22}$$
$$p(t_2) = \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_2} \tag{23}$$

Diskret optimalregulering

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, k) \tag{24}$$
$$J = S(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \tag{25}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$H_k = L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T(x_{k+1} - x_k) \tag{26}$$
$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{27}$$
$$p_N = \frac{\partial S}{\partial x_N} \tag{28}$$

Derivasjonsregler

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qx) = Q^T \tag{29}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^TQx) = Qx + Q^Tx \tag{30}$$

Avansert reguleringsteknikk
Løsning eksamen 11. juni 1996

Oppg. 1

a)

1. Se pensum

2. $C = [B \ \ AB \ \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$

evt.

$$C = [B \ \ AB \ \ A^2B \ \cdots \ A^{n-\ell}B]$$

der $\ell = \text{rank}(B)$

3. $W_c = \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} \, d\tau$ Styrbarhets Grammian

$\text{rank}(W_c) = n$ for $t > 0 \Rightarrow$ styrbart

For stabilt system. La $t \to \infty$. Da har vi

$$A W_c + W_c A^T = -BB^T$$

Sammenheng mellom W_c og C, for diskrete systemer, med $N \to \infty$,

$$W_c = C \cdot C^T$$

b) Prosessen er styrbar.

$C = B$ og $\text{rank}(C) = \text{rank}(B) = 2$

c) $H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\frac{3}{4}} - 3 & \frac{9}{2} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3(s+\frac{5}{12})}{s+\frac{3}{4}} & \frac{9}{2} \\ \cdots & -6(s+\frac{7}{12}) \cdots \end{bmatrix}$$

d) Transmisjonsnullpunkter:

$$\underline{\underline{p = -0.64}}$$

$$|H(s)| = \left(\frac{1}{s+\frac{3}{4}} - 3\right)\left(\frac{1}{s+\frac{3}{4}} - 6\right) - 18$$

$$= \frac{1}{s+\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{s+\frac{3}{4}} - 9\right) = \frac{-9s - \frac{23}{4}}{\left(s+\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$|H(s)| = 0 \quad \text{for} \quad \underline{\underline{s = \frac{-\frac{23}{4}}{9} = -\frac{23}{36} \approx -0.64}}$$

e) Tilstands-tilbakekopling forandrer
<u>ikke systemets transmisjonsnullpunkter.</u>

Har

$A_{cl} = A + BG \qquad B_{cl} = B$

$D_{cl} = D + EG \qquad E_{cl} = E$

Oppg. 2

a) $u = -P^{-1}B^T R \cdot x$

der $A^T R + RA - R B P^{-1} B^T R + Q = 0$

b)
- (A, B) – stabiliserbart par
- (Q, A) – detekterbart par

  (evt $Q = \tilde{D}^T \cdot \tilde{D}$, $(\tilde{D}, A)$ – detekterbart par)
- $P > 0$, positiv definit

c) $Q = 0$ gir

$$A^T R + R(A - H \cdot R) = 0$$

der $H = BP^{-1}B^T$ og $A - HR$ er et uttrykk for det lukkede systemet.

Dette gir

$$A - HR = -R^{-1}A^T R$$

og

$$\underline{\underline{\lambda(A - HR) = -\lambda(A^T) = -\lambda(A)}}$$

__dvs.__ Med $Q = 0$ blir egenverdiene til det lukkede system lik det speilvendte av egenverdiene til det åpne system, speilvendt om den imaginære akse.

d) $$H = \frac{1}{2}(x^TQx + 2x^TNu + u^TPu) + p^T(Ax + Bu)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -P^{-1}(B^Tp + N^Tx)$$

Antar $p = R \cdot x$ og får

$$\underline{\underline{u = -P^{-1}(B^TR + N^T)x}} = G \cdot x$$

Riccati-ligningen for R blir

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - Nu - A^Tp$$

$$\dot{p} = \dot{R}x + R\dot{x}$$

Innsetter for $\dot{p}$ og $\dot{x} = Ax + B \cdot G x$

og får

$$\underline{\underline{-\dot{R} = A^TR + RA - RBP^{-1}B^TR + Q}}$$

$$\underline{\underline{\quad - NP^{-1}B^TR - RBP^{-1}N^T - NP^{-1}N^T}}$$

∞ - optimaliserings - tidshorisont medfører

$\dot{R} = 0$

e) Innfører $\tilde{x} = e^{\alpha t}x$ og $\hat{u} = e^{\alpha t}x$

$$\dot{\tilde{x}} = \alpha\tilde{x} + e^{\alpha t}\dot{x} = \alpha\tilde{x} + A\tilde{x} + B\hat{u}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A + \alpha I)\tilde{x} + B\hat{u}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\tilde{x}^TQ\tilde{x} + \hat{u}^TP\hat{u})\,dt$$

(Se A & M s. 60, ch. 3.5)

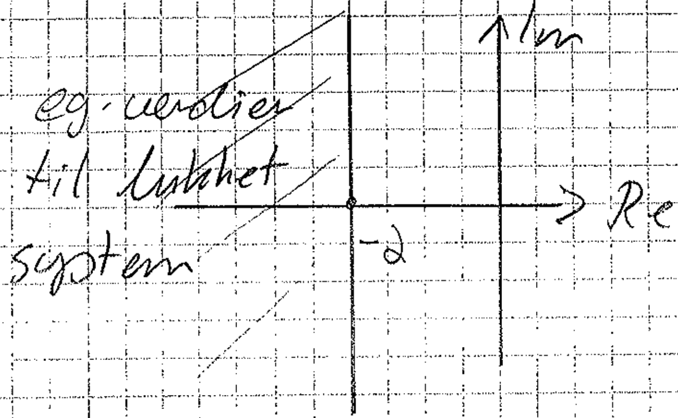
dvs

$$\tilde{u} = -P^{-1}B^T R\tilde{x} \Rightarrow \underline{\underline{u = -P^{-1}B^T R x}}$$

der

$$\underline{\underline{(A+\alpha I)^T R + R(A+\alpha I) - RBP^{-1}B^T R + Q = 0}}$$

Egenverdiene til det lukkede systemet vil ligge til venstre for linjen $-\alpha$ i det komplekse plan.



Bevis

$$\dot{\tilde{x}} = (A+\alpha I)\tilde{x} + B\tilde{u}$$

med $\tilde{u} = -P^{-1}B^T R\tilde{x}$

er et stabilt system.

Vi har og at

$$x = e^{-\alpha t}\cdot\tilde{x}$$

Når $\tilde{x}$ er stabil, dvs. $\tilde{x} \to 0$ når $t \to \infty$, må $x \to 0$ minst så raskt som $e^{-\alpha t}$.

f) LQ optimal regulator problemet er dualt til minimum varians estimator problemet. Det finnes en "en-til-en" sammenheng mellom regulator og estimator problemet

• Se videre oppg. 4e, eksamen 1. juni 1995.

g) Antar $y = Dx$ og $u = G\hat{x}$

Estimator:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - D\hat{x})$$
$$= (A - KD)\hat{x} + BG\hat{x} + KDx$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = Ax + \cancel{BG\hat{x}} - (A - KD)\hat{x} - \cancel{BG\hat{x}} - KDx$$
$$= (A - KD)(x - \hat{x})$$

og $\dot{x} = Ax + BG\hat{x} = (A + BG)x - BG(x - \hat{x})$

Dette kan skrives som følgende autonome system

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BG & -BG \\ 0 & A - KD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

Oppg. 3

a)

$$H = \frac{1}{2}\left(x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k\right) + p_{k+1}^T \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

kan vise

$$\underline{\underline{u_k = -P^{-1} B^T p_{k+1} = -P^{-1} B^T A^{-T} (R_k - Q) \cdot x_k}}$$

der

$$R_k = Q + A^T \left[R_{k+1}^{-1} + B P^{-1} B^T \right]^{-1} A$$

evt

$$R_k = Q + A^T R_{k+1} \left[I + B P^{-1} B^T R_{k+1} \right]^{-1} A$$

b) <u>krav til matrisen</u>:

(A, B) – stabiliserbart

A – ikke singulær, dvs. A^{-1} må eksistere, ingen eg.verdier av A i origo, dvs. systemet kan ikke være ∞ hurtig (statisk) for at opt. løsn. skal ha mening.

(Se A & M ch. 2.4 og s. 53)

Oppg. 4

a)

$$u = -P^{-1}B^T p$$

$$p = Rx + h$$

$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q$$

$$\dot{h} = (RBP^{-1}B^T - A^T)h + D^T Q \cdot r$$

$$= -(A - B \cdot P^{-1}B^T R)^T h + D^T Q r$$

b) $t_1 \to \infty$, $\dot{R} = 0$ og $\dot{h} = 0$

$$u = G_1 \cdot x + G_2 \cdot r$$

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -P^{-1}B^T R \\ G_2 &= -P^{-1}B^T F^{-T} D^T Q \end{aligned}\right\} \text{konstante matrisen}$$

$$F = A - B \cdot P^{-1}B^T R$$

Oppg. 5

a)

$$y_{k+1} = x_{k+1} = a x_k + b u_k = a y_k + b u_k$$
$$y_k = \qquad a y_{k-1} + b u_{k-1}$$

dvs

$$y_{k+1} = p_1(k) + F_1 \Delta u_k$$

der

$$p_1(k) = y_k + a(y_k - y_{k-1}) = y_k + a \Delta y_k$$
$$F_1 = b$$
$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$$

QED

b)

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u_k} = 0 \Rightarrow \Delta u_k = -(P + F_1^T Q F_1)^{-1} F_1^T Q (p_1(k) - r_{k+1})$$

dvs

$$\Delta u_k = -\frac{q b}{p + q b^2}(y_k + a \Delta y_k - r_{k+1})$$

c) Anta at r_k er en stasjonær prosess og at lukket system er stabilt.

$$k \to \infty \Rightarrow \Delta y_k = 0 \text{ og } \Delta u_k = 0$$

Dette betyr at vi må ha

$$y_k = r_{k+1} \Rightarrow y = r$$

dvs. null stasjonært avvik.

EKSAMEN I FAG
AVANSERT REGULERINGSTEKNIKK
TORSDAG 1. JUNI 1995
Tid: kl. 9.00 - 14.00

Klasse: 1PA (regulering)
Eksamensoppgaven består av: 5 sider, 4 oppgaver, 1 vedlegg
Tillatte hjelpemidler: vedheftet vedlegg

Fagelig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 69

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1

Gitt en prosess beskrevet med følgende modell

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$
$$y = Dx + Eu \tag{2}$$

der både tilstandsvektoren (x) og utgangsvektoren (y) er målte. Prosessens pådragsvektor er (u). Matrisene i modellen er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Er prosessen styrbar ?

b) Bestem transfermatrisen ($H(s)$) fra pådragsvektoren (u) til utgangsvektoren (y).

c) Bestem transmisjonsnullpunktene til transfermatrisen ($H(s)$).

d) Anta at prosessen skal sett-punkts reguleres med enkeltsløyfe PID regulatorer (tilbakekopling). Vil det være begrensninger i det regulerte systemets båndbredde ? Spesifiser i såfall omtrentelig båndbredde.

e) Anta en (konstant) settpunktsvektor (y^s). Vi ønsker et reguleringssystem basert på dekopling. Foreslå en dekoplings-strategi for prosessen og tegn blokkdiagram (blokkdiagrammet kan være på vektor og matriseform). Hint: bestem pådragsvektoren (u) slik at $y = \tilde{u}$ der $\tilde{u}$ er et ekvivalent (modifisert) pådrag.

Oppgave 2

Gitt et system beskrevet med følgende lineære tidsinvariante modell

$$\dot{x} \quad = \quad Ax + Bu \tag{3}$$

der $x(t_0 = 0) = x_0$ er tilstandsvektorens initialverdi, u er systemets pådragsvektor. Systemet ønskes regulert slik at følgende kvadratiske optimal-kriterium minimaliseres.

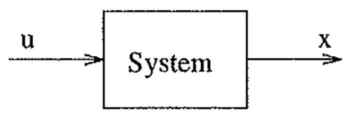
$$J = \frac{1}{2}\int_0^T (x^T Q x + u^T P u)dt \tag{4}$$

a) Bestem et uttrykk for pådraget, u, slik at optimal-kriteriet, ligning (4), minimaliseres. (Hint: Riccati-ligningen er en del av løsningen.)

b) Anta at tidshorisonten, T, i kriteriet går mot uendelig, dvs. $T \to \infty$. Bestem nå et utrykk for pådraget, u, som minimaliserer optimal-kriteriet (4).

c) Hva blir den minimale verdien på optimal-kriteriet, J, for pådraget funnet i punkt b) ?

d) Anta nå et system



modellert ved,

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u \tag{5}$$

der $\Delta x = x - x^s$ og $\Delta u = u - u^s$ er avvik om henholdsvis en stasjonær tilstandsvektor x^s og en stasjonær pådragsvektor u^s.

Benytt regulatoren (tilbakekoplings-matrisen) funnet i punkt b) på dette systemet. Tegn blokkdiagram. x^s er settpunkt for tilstandsvektoren x og u^s er settpunkt for pådragsvektoren u.

e) Hvilket krav må vi sette til vektmatrisen P i optimal-kriteriet, ligning (4) ? Drøft kort innvirkningen av P på den optimale pådragsbruken.

f) Anta $T \to \infty$ og at vektmatrisen for tilstandene kan skrives som $Q = D^T D$ i optimal-kriteriet. Hvilke krav må vi sette til matrisene A, B og D for at det optimale tilbakekoplede systemet skal være stabilt ?

Oppgave 3

Gitt en prosess beskrevet med modellen

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \tag{6}$$
$$y = Dx \tag{7}$$

der

x er en n-dimensjonal tilstandsvektor.

u er en r-dimensjonal pådragsvektor.

v er en p-dimensjonal vektor av langsomt varierende forstyrrelser.

y er en m-dimensjonal vektor av utgangsvariable.

I denne oppgaven er det antatt at hele tilstandsvektoren (x) samt hele forstyrrelsesvektoren (v) er tilgjengelig (målt).

a) Prosessen ønskes regulert med en multivariabel PI-regulator (tilbakekopling fra x og integralvirkning på avviket mellom settpunkt $y^s = 0$ og utgangsvektoren y) samt en foroverkopling fra forstyrrelsesvektoren (v).

Sett opp en utvidet tilstandsrom-modell, som består av modellen for tilstandsvektoren (x), en modell for integral-sløyfen samt en modell for forstyrrelses-vektoren (v), av formen

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \tag{8}$$

Spesifiser tilstandsvektoren ($\tilde{x}$) og systemmatrisene ($\tilde{A}$ og $\tilde{B}$) i den utvidede tilstandsrom-modellen. Hint: forstyrrelsesvektoren v kan antas å være konstant.

b) Sett opp et passende kvadratisk optimal-kriterium med uendelig tidshorisont med tanke på design av en optimal tilbakekopling $u = \tilde{G}\tilde{x}$ for systemet i punkt 1. Drøft kort valg av vektmatrise for den utvidede tilstandsvektoren ($\tilde{x}$).

c) Sett opp ligningene som må løses for å finne den optimale tilbakekoplingsmatrisen ($\tilde{G}$). Tegn blokkdiagram for prosessen og reguleringssystemet (multivariabel PI-tilbakekopling og foroverkopling).

d) Hvilet krav må vi stille til antall pådrag (r) og antall utgangsvariable (m) for å kunne ha integral virkning på alle utgangsvariable ? Forsøk å begrunne svaret ved å betrakte systemet i steady-state.

Oppgave 4

a) Gitt prosessen

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9}$$
$$y = Dx \tag{10}$$

Vi ønsker en tilbakekopling fra alle tilstander. Målevektoren er y. Når er det her nødvendig å benytte en tilstandsestimator ? Hvilket krav må vi stille til prosessen for å kunne benytte en slik ?

b) Gitt reguleringssystemet i Figur 1 for prosessen (ligningene (9) og (10)).

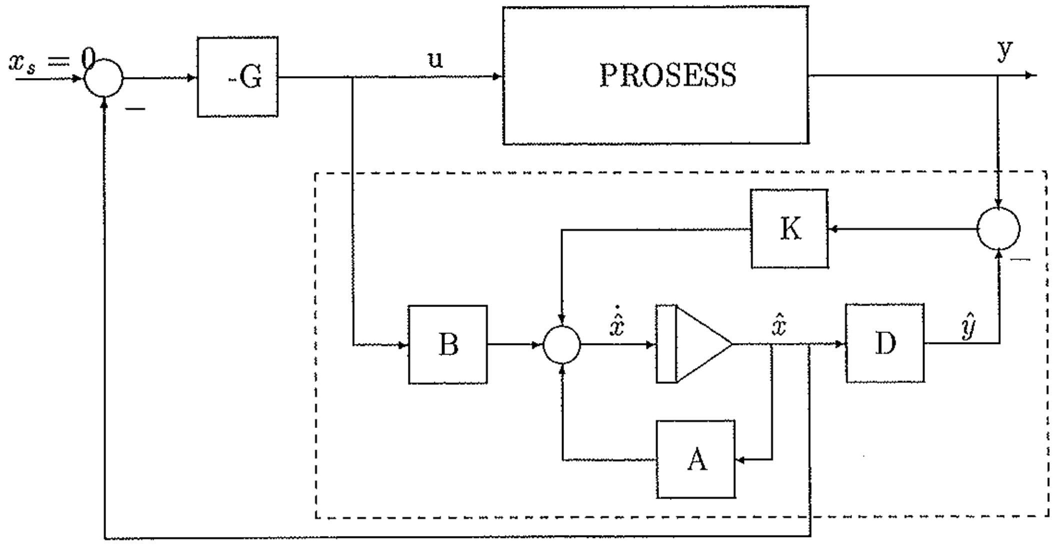


Figure 1: Reguleringssystem for prosessen.

Sett opp en tilstandsrombeskrivelse for hele systemet (prosess, tilstandsestimator og tilbakekopling).

c) Hva blir egenverdiene til hele systemet ?

d) Hva går separasjonsteoremet ut på ?

e) Hva menes med (LQ optimal) regulator-estimator dualitet ?

Vedlegg

Optimalregulering

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,u,t) && (11)\\
J &= S(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} L(x,u,t)dt && (12)
\end{aligned}
$$

Maksiumumsprinsippet

$$
\begin{aligned}
H &= L + p^T f && (13)\\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (14)\\
p(t_2) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_2} && (15)
\end{aligned}
$$

Løsning

Eksamen 1/6 - 1995
Avansert reguleringsteknikk

Oppgave 1

a) Prosessen er styrbar

- Ingen rekker i matrisen B er identisk lik null, som er krav for styrbarhet av et system med diagonal system-matrise A
- Rangen av styrbarhetsmatrisen $C = [B \;\; AB]$, dvs. $\text{rang}(C) = 2$.

b)

$$H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+\frac{1}{2}} & \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{2} - s}{s+\frac{1}{2}} & \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{-s}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-2s}{1+2s} & \frac{2}{1+2s} \\ \frac{1}{1+s} & \frac{-s}{1+s} \end{bmatrix}$$

c)

Siden antall innganger er lik antall utganger kan transmisjonsnullpunktene finnes som røttene i teller-polynomet til $det(H(s))=0$

$$det(H(s)) = |H(s)| = \frac{3-2s}{1+2s}\,\frac{-s}{1+s} - \frac{1}{1+s}\,\frac{2}{1+2s}$$

$$= \frac{2s^2-3s-2}{(1+2s)(1+s)} = 0$$

dvs. $2s^2-3s-2 = 2(s^2-\frac{3}{2}s-1)=0$

$$\Rightarrow s = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4\cdot 1}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

Transmisjonsnullpunkter: $s_1 = 2$ og $s_2 = -\frac{1}{2}$

d) Prosessen har et transmisjons-nullpunkt i høyre halv plan (s-plan) og er derfor et ikke-minimum fase system. Det vil derfor være begrensninger i det lukkede systemets båndbredde.
$s_1 = 2$ danner en øvre grense for det lukkede systemets båndbredde.

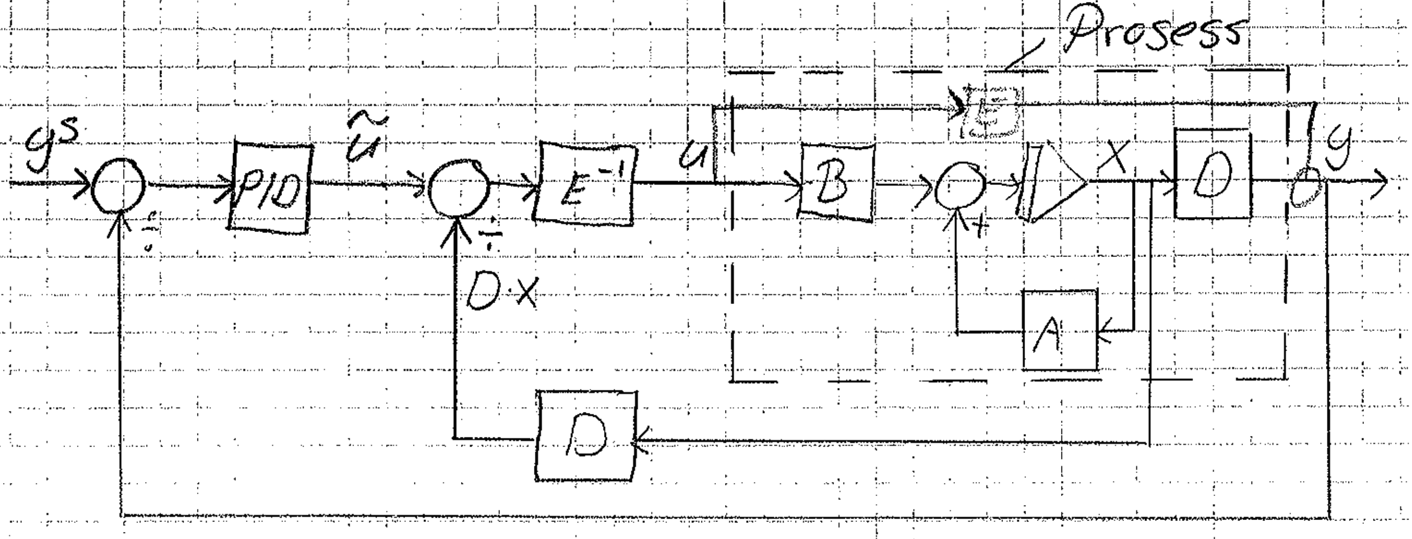
e) Prosess: $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Dx + Eu$

Dekobler: $y = Dx + Eu = \tilde{u}$

$\Updownarrow$

$u = E^{-1}(\tilde{u} - Dx)$



Dvs. Prosessen fra det "ekvivalente" pådraget $\tilde{u}$ til y er, $y = \tilde{u}$.
For å regulere, $y = \tilde{u}$, til spesifisert settpunkt y^s er det tilstrekkelig med en I-regulator, men PI(D) er Ok.

Oppgave 2

a)

$$u = -P^{-1}B^T R \cdot x \qquad (1)$$

$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q \qquad (2)$$

Grensebetingelse: $R(T) = 0$ (3)

b) $T \to \infty$ dvs $\dot{R} \to 0$

Trenger nå bare å løse den stasjonære Riccati-ligningen,

dvs.

$$u = -P^{-1}B^T R \cdot x \qquad (4)$$

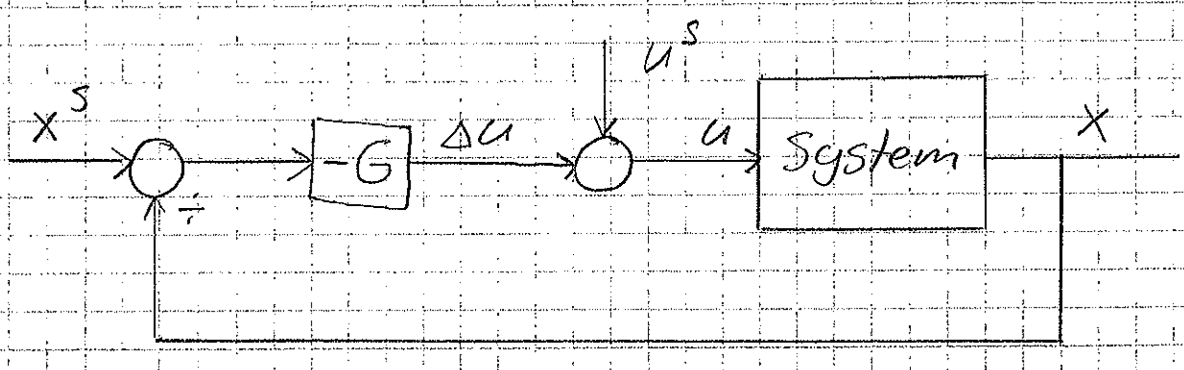
$$A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q = 0 \qquad (5)$$

c)

$$J_{min} = \frac{1}{2} x_0^T R x_0 \qquad (6)$$

der R er løsningen av (5).

d) Definerer $G = -P^{-1}B^T R$ (regulatormatrise)



dvs. $\Delta u = G \cdot \Delta x$

$$\Downarrow$$

$$u = G\Delta x + u^s = -G(x^s - x) + u^s$$

e)

· P må være positiv definit, dvs. $P > 0$. Dette for å kunne invertere P og for å garantere at vi har et minimum av J.

Anta $P = \rho \cdot I$

$\rho \to 0$, pådraget (u) blir mer og mer "gratis". $G = -P^{-1}B^T R$ blir normalt stor og man får hurtigere system.

f) Definer $Q = D^T \cdot D$ der $Q \geq 0$

1) (A, B) må være et <u>stabiliserende</u> matrise-par. Dette er et noe mildere krav en styrbarhet og betyr at evt. <u>ustabile egenverdier i A må være styrbare.</u>

2) (D, A) må være et <u>detekterbart</u> matrise-par. Dette betyr at evt. ustabile tilstander (eg. verdier i A) må kunne observeres av kriteriet (J).

Kravene 1) og 2) garanterer en løsning av LQ-problemet og at denne er stabiliserende, dvs $A + BG$, $G = -P^{-1}B^T R$ er stabil. (Merk. må også her ha $P > 0$)

Oppgave 3

a)

Prosess-modell : $\dot{x} = Ax + Bu + C \cdot v$

PI-regulator modell : $\dot{z} = y^s - y = -D \cdot x$

Modell av forstyrrelsene : $\dot{v} = 0$

Utvidet tilstandsrom-modell

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & C \\ -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ z \\ v \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u$$

dvs. av formen

$$\underline{\underline{\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u}}$$

b) Optimal kriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + u^T P u)\,dt$$

der

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_z & 0 \\ 0 & 0 & Q_v \end{bmatrix} \geq 0$$

- Normalt vil man ikke vektlegge forstyrrelser i kriteriet slik at vi kan sette $Q_v = 0$.
- Q_x og Q_z kan velges som diagonale matriser men diagonalleddene i Q_x bør velges en til to dekader større enn diagonal-leddene i Q_z

c)

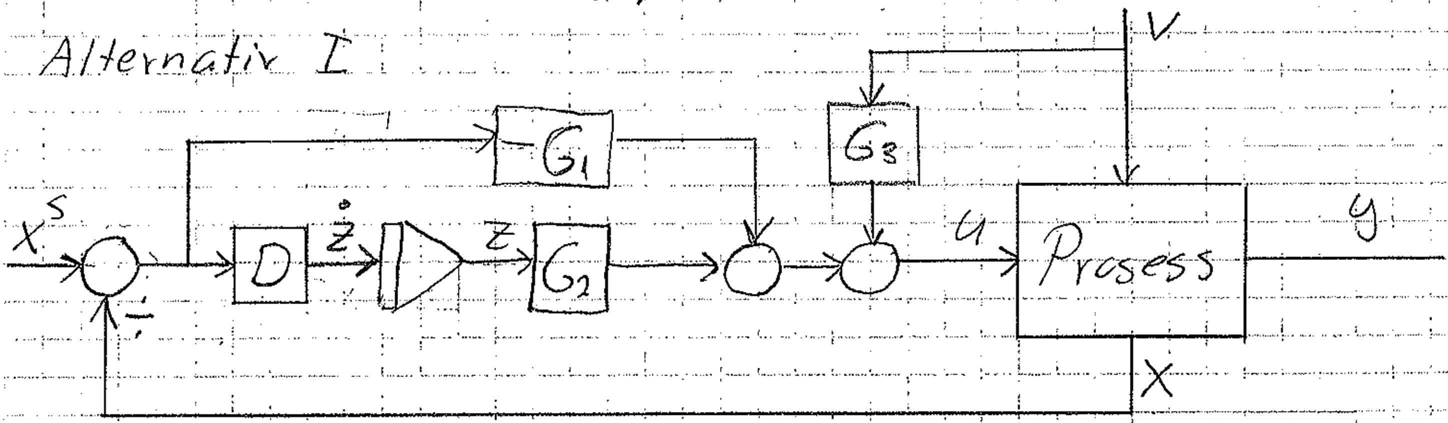
$$u = \tilde{G}\tilde{x} = G_1 \cdot x + G_2 \cdot z + G_3 \cdot v$$

(ARE): $$\tilde{A}^T R + R\tilde{A} - R\tilde{B}P^{-1}\tilde{B}^T R + \tilde{Q} = 0$$

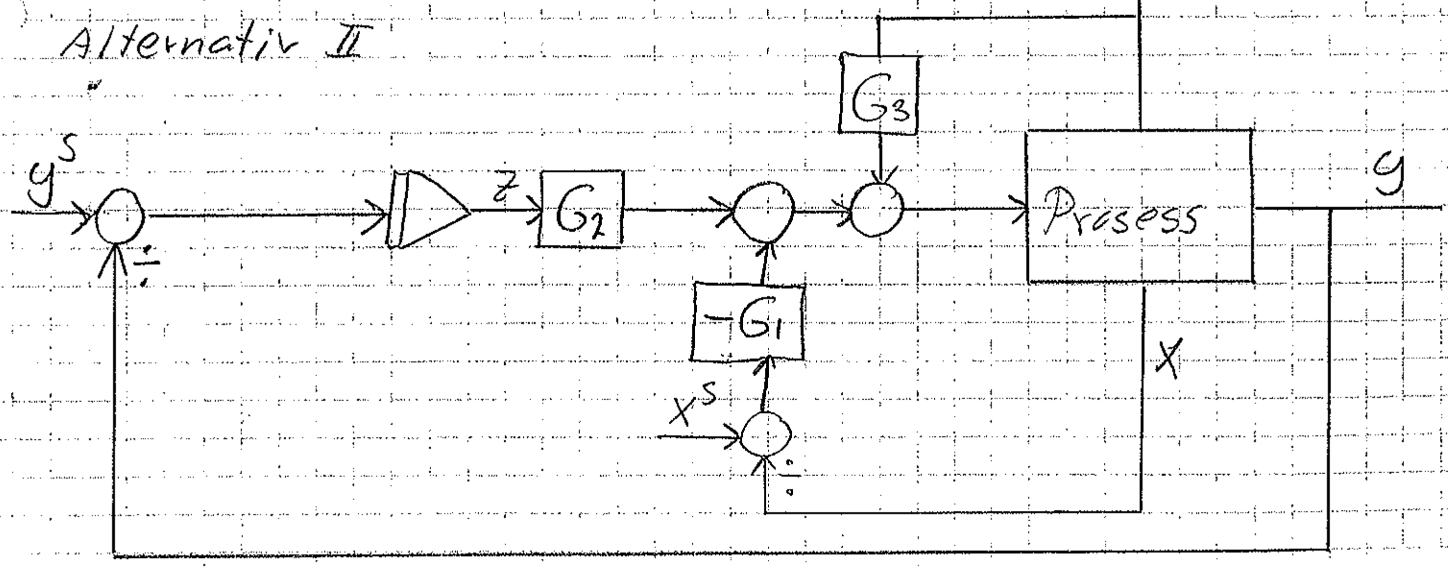
$$\tilde{G} = -P^{-1}\tilde{B}^T R$$
$$= -P^{-1}\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -P^{-1}BR_{11} & -P^{-1}BR_{21} & -P^{-1}BR_{31} \end{bmatrix}$$

Dvs. først løses ARE for R deretter bestemmes $\tilde{G}$.

Alternativ I



Alternativ II



d)

I "Steady state" har vi fra prosess-modellen

$$y = -DA^{-1}B \cdot u$$

For at det skal eksistere en pådrags-vektor (u) som bringer prosessen til et sett-punkt (y^s) må gain-matrisen $-DA^{-1}B$ kunne inverteres. Et krav er da at $-DA^{-1}B$ er kvadratisk.

Dette krever $\underline{\underline{m = r}}$

Oppgave 4

a) - Det er nødvendig med en tilstandsestimator når $m \neq n$, dvs. når $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ er en rektangulær matrise. Dersom D er inverterbar kan nemlig tilstandene beregnes som $\hat{x} = D^{-1} \cdot y$.

- Prosessen, dvs. matrise paret (D, A), må være observerbar.

Dvs.

$$\text{rang}(O) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{n-m} \end{bmatrix}\right) = n \Rightarrow \underline{\text{observerbart}}$$

b)

Prosess: $\dot{x} = Ax + Bu$

Estimator: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - D \cdot \hat{x})$

Pådrag: $u = G\hat{x}$, måling: $y = D \cdot x$

Dette gir lukket system:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BG \\ KD & A - KD + BG \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A + BG & -BG \\ 0 & A - KD \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

c)

Modellen i b) er av formen

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x}$$

$\lambda(\tilde{A})$ er dermed totalsystemets egenverdier.

Dette kan videre spaltes i egenverdiene til det regulerte systemet, $\lambda(A + B \cdot G)$, og egenverdiene til estimatoren, $\lambda(A - KD)$

d)

Separasjonsteoremet går ut på at man kan designe regulator og estimator uavhengig av hverandre. Det vil være LQ-optimalt med $u = -P^{-1}B^T R \cdot \hat{x}$, og $-P^{-1}B^T R$ beregnes som om x var kjent.

e) Estimerings-problemet er dualt til LQ-regulator problemet (samme kompleksitet!).

Regulator	$\xrightarrow{\text{dualitet}}$	Estimator
A	$\longrightarrow$	A^T
B	$\longrightarrow$	D^T
Q	$\longrightarrow$	V
P	$\longrightarrow$	W
G	$\longrightarrow$	K^T
$A+BG$	$\longrightarrow$	$(A^T - D^T \cdot K^T)^T$
t	$\longrightarrow$	$-t$

$$AX + XA^T - XD^T W^{-1} DX + V = 0$$

$$K^T = -W^{-1} D \cdot X$$