Delprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering tirsdag 28. september 2004 kl. 10.15-12.15

Delprøven består av: 2 oppgaver.
Oppgaven teller 30 % av sluttkarakteren.
Det er 3 sider i delprøven.
Tillatte hjelpemidler: vedlegg til oppgaven

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Masterstudiet i Kybernetikk og industriell IT
Institutt for elektro, IT og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (12%): Diverse spørsmål

a)

Gitt et lineært system beskrevet med

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

der $x \in \mathbb{R}^n$ er systemets tilstandsvektor. Anta at initialtilstanden $x(t_0)$ er kjent.

- Sett opp et utrykk for løsningen $x(t)$ av tilstandsligningen (1) der $t_0 \leq t$.
- Anta at $u(\tau)$ er konstant over intervallet $t_0 \leq \tau \leq t$. Vis at løsningen av tilstandsligningen da kan skrives på formen

$$x(t) = \Phi x(t_0) + \Delta u(t_0) \tag{2}$$

  Du kan forutsette at A er inverterbar og finne et analytisk utrykk for integrasjonen som inngår i utrykket for Δ.
- Hvordan kan du benytte det ovenstående til å lage en diskret modell ?

b) Gitt et system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$
$$y = Dx + Eu. \tag{4}$$

Hvordan kan vi benytte den generaliserte egenverdimetoden til å finne transmisjons-nullpunktene til systemet?

c) Finn systemets transfermatrise, $H(s)$, med utgangspunkt i tilstandsrommodellen i (3) og (4) slik at

$$y(s) = H(s)u(s). \tag{5}$$

d) Gitt et system der systemets transfermatrise er

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & -\frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Bestem systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.
- Bestem systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

Oppgave 2 (18%)
(Kontinuerlig LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven studere et kontinuerlig LQ optimalreguleringsproblem. Utgangspunktet er en prosess som vi modellerer med en kontinuerlig tilstandsrommodell av formen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{7}$$

der initialtilstandsvektoren, $x(t_0)$, er kjent.

a) Anta at vi har gitt en objektfunksjon

$$J = \frac{1}{2}x(t_1)^T S x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T P u)dt. \tag{8}$$

- Utled og finn et uttrykk for det optimale pådraget, $u(t)^* \ \forall \ t_0 \leq t \leq t_1$, for prosessen i (7) som minimaliserer objektfunksjonen (8). Svaret skal bla bestå av en Riccatiligning med grensebetingelse.
- Hva blir minimumsverdien av kriteriet ?

b) Anta nå at vi har et skalart system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu, & (9) \\ y &= x, & (10) \end{aligned}$$

og et LQ-optimalkriterium med uendelig tidshorisont

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} (qy^2 + pu^2)dt. \tag{11}$$

- Hva blir løsningen på optimalreguleringsproblemet? Bruk resultatet fra punkt 2a).
- Finn den analytiske løsningen på optimalreguleringsproblemet, dvs. finn en analytisk løsning for Riccatiligningen og det optimale pådraget.
- Diskuter egenverdien til det lukkede (regulerte) systemet som funksjon av vektparametrene q og p.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) && (12) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt && (13) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f && (14) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && (15) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} && (16) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) && (17) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) && (18) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) && (19) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} && (20) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} && (21) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T && (22) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x && (23) \end{aligned}$$