Sluttprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering torsdag 23. oktober 2003 kl. 13.15-15.15

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Oppgaven teller 60 % av sluttkarakteren.
Det er 4 sider i sluttprøven.
Tillatte hjelpemidler: vedlegg til oppgaven

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Kybernetikk og industriell IT
Institutt for elektro, IT og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (40%)
(Diskret LQ optimalregulering med integralvirkning)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en modell av formen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v, \quad (1)$$
$$y_k = Dx_k + w, \quad (2)$$

der v og w er konstante og ukjente forstyrrelser.
Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å designe en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}((y_k - r)^T Q(y_k - r) + \Delta u_k^T P \Delta u_k). \quad (3)$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ og r er en konstant referansevektor. Q og P er symmetriske og positiv semidefinite matriser.

a) Vis at det er mulig å skrive modellen i (1) og (2) på endringsformen

$$\Delta x_{k+1} = A\Delta x_k + B\Delta u_k, \quad (4)$$
$$\Delta y_k = D\Delta x_k, \quad (5)$$

der

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \ \Delta u_k = u_k - u_{k-1},\ \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}. \quad (6)$$

Hva er hensikten med dette ?

b) For å løse optimalreguleringsproblemet over så er det hensiktsmessig å skrive tilstandsrommodellen på en form som sammen med kriteriet i (3) danner et "standard LQ-optimalreguleringsproblem". Vis at modellen i (1) og (2) kan skrives på formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\Delta u_k, \quad (7)$$
$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \quad (8)$$

der

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix},\ \ \tilde{y}_k = y_k - r. \quad (9)$$

Du skal oppgi uttrykk for matrisene $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ og $\tilde{D}$. Merk: du kan her med fordel benytte modellen i (4) og (5).

c) Modellen vi kom frem til i punkt 1b) og kriteriet i (3) danner et standard diskret LQ optimalreguleringsproblem av formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k, \tag{10}$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \tag{11}$$

med optimalkriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}(\tilde{y}_k^T Q \tilde{y}_k + \tilde{u}_k^T P \tilde{u}_k), \tag{12}$$

der vi for enkelthetsskyld har definert

$$\tilde{u}_k = \Delta u_k. \tag{13}$$

Utled eller sett opp den LQ optimale løsningen av formen

$$\tilde{u}_k = \tilde{G}\tilde{x}_k. \tag{14}$$

Løsningen består av en diskret Riccati ligning og et uttrykk for regulatormatrisen $\tilde{G}$. Sett deretter opp et utrykk for det aktuelle pådraget av formen

$$u_k = f(\cdot) \tag{15}$$

som skal benyttes til å regulere prosessen.

d) En PI regulator kan i Laplace-planet skrives som

$$u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}(r - y). \tag{16}$$

1. Sett opp en kontinuerlig tidsplanbeskrivelse av PI regulatoren i (16).
2. Lag en diskret tidsplanbeskrivelse av PI-regulatoren. Du kan her benytte eksplisitt Eulers metode.
3. Skriv den diskrete PI-regulatoren på endringsform og sammenlign med LQ-optimalregulatoren i punkt 1c).

Oppgave 2 (20%)
(LQ optimalregulering)

Gitt et kontinuerlig lineært system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{17}$$
$$y = Dx, \tag{18}$$

og et LQ kriterium

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y^T Q y + u^T P u)dt. \tag{19}$$

a) Finn det optimale pådraget, $u(t)^*$, som minimaliserer LQ kriteriet (19) for systemet i (17) og (18). Svaret skal bestå av en formel for det optimale pådraget samt en Riccati-ligning.

b) Hvilke krav har vi til systemet i (17) og (18) samt vektmatrisene i kriteriet (19) for at det LQ-optimal regulerte systemet skal være garantert stabilit?

c) Anta nå at systemet endres til

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{20}$$
$$y = Dx + Eu, \tag{21}$$

Finn det optimale pådraget, $u(t)^*$, som minimaliserer LQ kriteriet (19) for systemet i (20) og (21). Svaret skal bestå av en formel for det optimale pådraget samt en Riccati-ligning.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) & (22) \\ J &= S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt & (23) \end{aligned}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H &= L + p^T f & (24) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} & (25) \\ p(t_1) &= \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} & (26) \end{aligned}$$

Diskret optimalregulering

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x_k, u_k, k) & (27) \\ J_i &= S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) & (28) \end{aligned}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$\begin{aligned} H_k &= L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) & (29) \\ p_{k+1} - p_k &= -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} & (30) \\ p_N &= \frac{\partial S}{\partial x_N} & (31) \end{aligned}$$

Derivasjonsregler

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Qx) &= Q^T & (32) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) &= Qx + Q^T x & (33) \end{aligned}$$