Sluttprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering tirsdag 30. mai 2006 Tid: kl. 9.00 - 12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Prøven teller 70% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (25%): Prediksjonsfeilmetoder

a) Gitt et system som kan beskrives med modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k, \quad (1)$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \quad (2)$$

der v_k er hvit prosessstøy og w_k er hvit målestøy.

- Sett opp et Kalmanfilter på innovasjonsform for denne prosessen.
- Hva menes med innovasjonsprosessen?

b) Sett opp et Kalmanfilter på prediksjonsform for beregning av predikert måling, $\bar{y}_k$, av målingen y_k. Poenget er å bruke prediksjonsformuleringen i en prediksjonsfeilmetode for systemidentifikasjon. Tips: dette er en omskrivning av innovasjonsformuleringen i punkt 1a) over som er egnet til simulering/beregning av $\bar{y}_k$ basert på data u_k og y_k.

c) Hva menes med en parametervektor, θ. Gi et eksempel på sammenhengen mellom θ og prediksjonsformuleringen av Kalmanfilteret for et system med $n = 1$ tilstander.

d) Definer begrepet prediksjonsfeil, ε_k, som en funksjon av y_k og $\bar{y}_k$.

e) Definer og besvar følgende:

- Hva menes med et prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi et eksempel på et slikt kriterium.
- Beskriv hvordan det optimale parameterestimatet, $\hat{\theta}_N$ kan beregnes.

Oppgave 2 (25%): Minste kvadraters metode og prediksjonsfeilmetoden

a) Gitt et system

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= ax_k + bu_k + ae_k, &(3)\\
y_k &= x_k + e_k. &(4)
\end{aligned}
$$

Vis at vi kan sette opp en lineær regressjonsmodell av formen

$$y_k = \varphi_k^T \theta_0 + e_k. \tag{5}$$

Definer spesielt variabelen φ_k og parametervektoren θ_0.

b)

- Basert på regressjonsmodellen i punkt a) over skal du sette opp en predktor, $\bar{y}_k(\theta)$, for målingen y_k.
- definer prediksjonsfeilen, ε_k.

c) Vi definerer følgende prediksjonsfeilkriterium

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^T \Lambda \varepsilon_k \tag{6}$$

der Λ er en spesifisert og symmetrisk vektmatrise.

Finn minste kvadraters metode estimatet (OLS), $\hat{\theta}_N$, for parametervektoren θ_0.

d) Vis hvordan du basert på OLS løsningen i punkt c) over kan utvikle en rekursiv minste kvadraters metode (ROLS) av formen

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t(y_t - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \tag{7}$$

Du skal finne ligninger for beregning av oppdateringsforsterkningen, K_t.

Oppgave 3 (20%): Diverse spørsmål

a) Definer kort følgende begreper:

- systemidentifikasjon
- optimal estimering

b) Gitt et system

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k, && (8)\\
y_k &= Dx_k + Eu_k + w_k && (9)
\end{aligned}
$$

der v_k er hvit prosessstøy og w_k er hvit målestøy.

Sett opp et kalmanfilter på apriori-aposteriori form for estimering av systemets tilstandsvektor, x_k.

c) Ut i fra en innovasjonsformulering

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ce_k, && (10)\\
y_k &= Dx_k + Eu_k + Fe_k && (11)
\end{aligned}
$$

er det mulig å sette opp en matriseligning

$$Y_{J|L} = O_L X_J + H_L^d U_{J|L} + H_L^s E_{J|L}. \tag{12}$$

- Beskriv kort strukturen på matrisene som inngår i matriseligningen.
- Beskriv hvordan systemets orden, n, og systemets observerbarhets-matrise, O_L, kan estimeres ut i fra en projeksjonsdatamatrise, $Z_{J|L}$.

d) Gitt den lineære modellen

$$Y = XB + E, \tag{13}$$

der X og Y er kjente datamatriser.

- Fitt et uttrykk for minste kvadraters metode estimatet, B_{OLS}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.
- Anta nå at $X \in \mathbb{R}^{N\times r}$ ikke har full rang men at

  $$\text{rang}(X) = a < r \tag{14}$$

  og slik at OLS estimatet ikke eksisterer.

  Fitt et uttrykk for Principal Component Regression (PCR) estimatet, B_{PCR}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B. Tips: Benytt en SVD av X.