Løsningsforslag til sluttprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering mandag 27. mai 2005 Tid: kl. 9.00 - 12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Prøven teller 70% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (25%): Prediksjonsfeilmetoder

a) Kalmanfilteret på innovasjonsform er gitt ved

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + Ke_k, \quad (1)$$
$$y_k = D\bar{x}_k + Eu_k + e_k \quad (2)$$

Innovasjonsprosessen er gitt ved

$$e_k = y_k - \bar{y} \quad (3)$$

der

$$\bar{y}_k = D\bar{x}_k + Eu_k \quad (4)$$

I et Kalmanfilter vil inovasjonsprosessen bli hvit støy, dvs. slik at middelverdien er null ($\mathrm{E}(e_k) = 0$) og slik at den har en gitt kovariansmatrise $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = \Delta$.

b) Ut i fra inovasjonsformuleringen av Kalmanfilteret over kan vi skrive en prediksjonsformulering som følger

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + K(y_k - \bar{y}_k), \quad (5)$$
$$\bar{y}_k = D\bar{x}_k + Eu_k \quad (6)$$

c) I et system med en tilstand kan vi skrive prediksjonsmodellen slik

$$\bar{x}_{k+1} = \theta_1\bar{x}_k + \theta_2 u_k + \theta_3(y_k - \bar{y}_k), \quad (7)$$
$$\bar{y}_k = \bar{x}_k + \theta_4 u_k \quad (8)$$

dvs slik at systemets parametervektor er

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dvs det er fire parametre i systemet siden vi kan velge en tilstandsrommodell der $d = 1$.

d) For en gitt parametervektor, θ. vil prediksjonsfeilen være gitt ved

$$\varepsilon_k = y_k - \bar{y}(\theta) \quad (10)$$

Merk at prediksjonsfeilen vil bli lik innovasjonsprosessen dersom vi finner den eksakte parametervektoren.

e) Prediksjonsfeilkriteriet, $V_N(\theta)$, er et skalart kriterium som skal minimaliseres med hensyn på parametervektoren θ. Et slikt kriterium kan være

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^T \Lambda \varepsilon_k \tag{11}$$

der Λ er en symmetrisk vektmatrise ofte valgt som $\Lambda = I$. Merk at dersom innovasjonsprosessen er kjent vil den optimale vektingen være gitt ved

$$\Lambda = (\mathrm{E}(e_k e_k^T))^{-1} = \Delta^{-1} \tag{12}$$

Det optimale parameterestimatet, $\hat{\theta}_N$, er den verdi på parametervektoren som minimaliserer prediksjonsfeilkriteriet mht θ, dvs.

$$\hat{\theta}_N = \arg\min V_N(\theta) \tag{13}$$

Oppgave 2 (25%): Minste kvadraters metode og prediksjonsfeilmetoden

a) Tilstandsligningen kan skrives slik

$$x_k = ax_{k-1} + bu_{k-1} + ae_{k-1} \tag{14}$$

Fra måleligningen har vi at

$$x_k = y_k - e_k, \quad \text{og} \quad x_{k-1} = y_{k-1} - e_{k-1}, \tag{15}$$

Innsetter vi (15) i (14) får vi

$$y_k - e_k = a(y_{k-1} - e_{k-1}) + bu_{k-1} + ae_{k-1} \tag{16}$$

som kan skrives som følgende lineære regressjonsmodell

$$y_k = \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + e_k = \varphi_k^T \theta_0 \tag{17}$$

Dvs. slik at

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

og

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{19}$$

b) En naturlig prediktor for målingen y_k er da

$$\bar{y}_k(\theta) = \varphi_k^T \theta \tag{20}$$

for en gitt verdi på parametervektoren. Prediksjonsfeilen er da gitt ved

$$\varepsilon_k = y_k - \bar{y}_k(\theta) = y_k - \varphi_k^T \theta \tag{21}$$

c) Vi deriverer prediksjonsfeilkriteriet mht paramatervektoren og får

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon_k^T \Lambda \varepsilon_k}{\partial \varepsilon_k} \tag{22}$$

Dette gir

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} -\varphi_k 2\Lambda \varepsilon_k = -2\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Lambda (y_k - \varphi_k^T \theta) \tag{23}$$

Setter vi gradienten lik null får vi OLS løsningen

$$\hat{\theta}_N = (\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Lambda \varphi_k^T)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Lambda y_k \theta) \tag{24}$$

d) Se avsnitt 12.7 i kompendiet.