

Sluttprøve i fag A2202
Systemidentifikasjon og optimal
estimering
mandag 27. mai 2005 Tid: kl. 9.00 -
12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Prøven teller 70% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (25%): Prediksjonsfeilmetoder

a) Gitt et system som kan beskrives med modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k, \quad (1)$$

$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \quad (2)$$

der v_k er hvit prosessstøy og w_k er hvit målestøy.

- Sett opp et Kalmanfilter på innovasjonsform for denne prosessen.
 - Hva menes med innovasjonsprosessen?
- b) Sett opp et Kalmanfilter på prediksjonsform for beregning av prediktert måling, \bar{y}_k , av målingen y_k . Poenget er å bruke prediksjonsformuleringen i en prediksjonsfeilmetode for systemidentifikasjon. Tips: dette er en omskrivning av innovasjonsformuleringen i punkt 1a) over som er egnet til simulering/beregning av \bar{y}_k basert på data u_k og y_k .
- c) Hva menes med en parametervektor, θ . Gi et eksempel på sammenhengen mellom θ og prediksjonsformuleringen av Kalmanfilteret for et system med $n = 1$ tilstander.
- d) Definer begrepet prediksjonsfeil, ε_k , som en funksjon av y_k og \bar{y}_k .
- e) Definer og besvar følgende:
- Hva menes med et prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi et eksempel på et slikt kriterium.
 - Beskriv hvordan det optimale parameterestimatet, $\hat{\theta}_N$ kan beregnes.

Oppgave 2 (25%): Minste kvadraters metode og prediksjonsfeilmetoden

a) Gitt et system

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + ae_k, \quad (3)$$

$$y_k = x_k + e_k. \quad (4)$$

Vis at vi kan sette opp en lineær regressjonsmodell av formen

$$y_k = \varphi_k^T \theta_0 + e_k. \quad (5)$$

Definer spesielt variabelen φ_k og parametervektoren θ_0 .

b)

- Basert på regressjonsmodellen i punkt a) over skal du sette opp en prediktor, $\bar{y}_k(\theta)$, for målingen y_k .
- definer prediksjonsfeilen, ε_k .

c) Vi definerer følgende prediksjonsfeilkriterium

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^T \Lambda \varepsilon_k \quad (6)$$

der Λ er en spesifisert og symmetrisk vektmatrise.

Finn minste kvadraters metode estimatet (OLS), $\hat{\theta}_N$, for parametervektoren θ_0 .

d) Vis hvordan du basert på OLS løsningen i punkt c) over kan utvikle en rekursiv minste kvadraters metode (ROLS) av formen

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t(y_t - \varphi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \quad (7)$$

Du skal finne ligninger for beregning av oppdateringsforsterkningen, K_t .

Oppgave 3 (20%): Diverse spørsmål

a) Definer kort følgende begreper:

- systemidentifikasjon
- optimal estimering

b) Gitt et system

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k, \quad (8)$$

$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \quad (9)$$

der v_k er hvit prosessstøy og w_k er hvit målestøy.

Sett opp et kalmanfilter på apriori-aposteriori form for estimering av systemets tilstandsvektor, x_k .

c) Ut i fra en innovasjonsformulering

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ce_k, \quad (10)$$

$$y_k = Dx_k + Eu_k + Fe_k \quad (11)$$

er det mulig å sette opp en matriseligning

$$Y_{J|L} = O_L X_J + H_L^d U_{J|L} + H_L^s E_{J|L}. \quad (12)$$

- Beskriv kort strukturen på matrisene som inngår i matriseligningen.
- Beskriv hvordan systemets orden, n , og systemets observerbarhetsmatrise, O_L , kan estimeres ut i fra en projeksjonsdatamatrikse, $Z_{J|L}$.

d) Gitt den lineære modellen

$$Y = XB + E, \quad (13)$$

der X og Y er kjente datamatriser.

- Fitt et uttrykk for minste kvadraters metode estimatet, B_{OLS} , av matrisen med regressjonskoeffisienter, B .
- Anta nå at $X \in \mathbb{R}^{N \times r}$ ikke har full rang men at

$$\text{rang}(X) = a < r \quad (14)$$

og slik at OLS estimatet ikke eksisterer.

Fitt et uttrykk for Principal Component Regression (PCR) estimatet, B_{PCR} , av matrisen med regressjonskoeffisienter, B . Tips: Benytt en SVD av X .