Delprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering fredag 4. mars 2005 Tid: kl. 10.15 - 12.15

Delprøven består av: 2 oppgaver.
Prøven teller 30% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (21%): Underroms-identifikasjon

Gitt et system som kan beskrives med tilstandsrom-modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ce_k, \tag{1}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + Fe_k \tag{2}$$

der e_k er hvit, $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = I$ og der følgende serie av utgangsdata og inngangsdata er kjent

$$\left.\begin{matrix} y_k \\ u_k \end{matrix}\right\} \;\forall\; k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{3}$$

a) Basert på modellen i (1) og (2) med data som i (3) kan man utlede følgende matriseligninger

$$Y_{J|L} = O_L X_J + H_L^d U_{J|L} + H_L^s E_{J|L}, \tag{4}$$
$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} + \tilde{C}_L E_{J|L+1}, \tag{5}$$

der J og L er to spesifiserte heltall. Oppgi strukturen på matrisene som inngår i ligningene.

b) I forbindelse med matriseligningene over definerer vi også to datamatriser $Y_{0|J}$ og $U_{0|J}$. Oppgi strukturen på disse datamatrisene og forklar kort hva som er poenget med dem.

c) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (4) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J|L} = O_L X_J^a \tag{6}$$

der data-matrisen $Z_{J|L}$ er kjent. Videre er det med utgangspunkt i matriseligningen (5) mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z_{J|L} \tag{7}$$

der data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ er kjente.

Finn uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningene (6) og (7) for følgende tre tilfeller:

- et autonomt system, dvs. der $u_k = 0$ og $e_k = 0$.
- et deterministisk system, dvs. der $e_k = 0$.
- et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system.
- et stokastisk system, dvs. der $u_k = 0$.

d) Vis hvordan

- systemets orden, n
- systemets utvidede observerbarhetsmatrise, O_L
- systemmatrisene, A og D,

kan estimeres.

e) Hva menes med begrepene

- intern balansert realisering
- utgangsnormal realisering
- inngangsnormal realisering

Oppgi alternative formler til den du benyttet i punkt 1d) for estimering av O_L

f) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (5) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z^d_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z^d_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} \tag{8}$$

der data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ er kjente.

Finn uttrykk for data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ i matrise-ligningen (8). Vi antar et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system.

g) Forklar hvordan $\tilde{B}$ kan beregnes og videre hvordan B og E matrisene kan estimeres. Ta gjerne utgangspunkt i et gitt eksempel der $L = 2$.

Oppgave 2 (9%): Regresjon

a) Gitt et system modellert med den lineære modellen

$$Y = XB + E \tag{9}$$

der $Y \in \mathbb{R}^{N\times m}$ og $X \in \mathbb{R}^{N\times r}$ er kjente datamatriser. $E \in \mathbb{R}^{N\times m}$ er en matrise med normalfordelt hvit støy. Vi antar at vi har så mange observasjoner, N, slik at $N > r$.

Finn et minste kvadraters metode estimat, B_{OLS} av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.

b) Anta nå at datamatrisen X ikke har full rang. Vis hvordan man kan utføre en Principal Component Analyse (PCA) av X ved hjelp av en singulærverdidekomposisjon (SVD).

c) Finn et Principal Component Regression (PCR) estimat B_{PCR} av matrisen med regressjonskoeffisienter, B. Du skal her benytte PCA resultatet fra punkt b) over.