Sluttprøve i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering mandag 24. mai 2004 Tid: kl. 9.00 - 12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Prøven teller 70% av sluttkarakteren i faget.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under prøven: David Di Ruscio
Institutt for elektro, informatikk og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (30%): Prediksjonsfeil og minste kvadraters metode

Gitt et system beskrevet med en 1. ordens diskret tilstandsrommodell

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + bu_k + ke_k, && (1) \\ y_k &= x_k + e_k, && (2) \end{aligned}$$

der

$$k = a. \tag{3}$$

a) Vis at tilstandsrommodellen i (1) og (2) kan skrives som en ARX modell av formen

$$A(q)y_k = B(q)u_k + e_k. \tag{4}$$

Oppgi polynomene $A(q)$ og $B(q)$ der q er en shift-operator slik at $q^{-1}u_k = u_{k-1}$.

b) Vis at ARX modellen over kan skrives som en lineær regressormodell av formen

$$y_k = \varphi_k^T \theta + e_k \tag{5}$$

der θ er en parametervektor som består av parametrene i tilstandsligningen (1). Sett opp utrykkene for φ_k og θ

c) Vi ønsker å finne et minste kvadraters metode estimat, $\hat{\theta}_N$ som minimaliserer prediksjonsfeilkriteriet

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k^T(\theta) \Lambda \epsilon_k(\theta). \tag{6}$$

der prediksjonsfeilen er gitt ved

$$\epsilon_k(\theta) = y_k - \varphi_k^T \theta \tag{7}$$

og Λ er en gitt vektmatrise.

Finn parameterestimatet, $\hat{\theta}_N$, som minimaliserer (6), dvs. slik at $\hat{\theta}_N$ er løsningen av

$$\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{8}$$

Oppgave 2 (10%): Rekursive metoder

Middelverdien til målingen y_t er gitt ved

$$\bar{y}_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} y_k \tag{9}$$

Del opp summen i (9) i to deler slik at

$$\bar{y}_t = \frac{1}{t} (\sum_{k=1}^{t-1} y_k + y_t) \tag{10}$$

og bruk at

$$\bar{y}_{t-1} = \frac{1}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k \tag{11}$$

og finn en rekursiv formel

$$\bar{y}_t = f_1(\bar{y}_{t-1}) + f_2(y_t) \tag{12}$$

for rekursiv beregning av middelverdien til målingen y_t. Du skal sette opp uttrykk for funksjonene $f_1(\cdot)$ og $f_2(\cdot)$.

Oppgave 3 (30%): Diverse spørsmål

a) Gitt et system som kan beskrives med den diskrete modellen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k, && (13) \\ y_k &= Dx_k + Eu_k + w_k, && (14) \end{aligned}$$

der v_k er prosesstøy og w_k er målestøy.

- Sett opp uttrykket for et diskret Kalmanfilter på innovasjonsform.
- Sett opp et diskret Kalmanfilter på apriori-aposteriori form for estimering av tilstandsvektoren, x_k.
- Er det noen sammenheng mellom Kalmanfilterforsterkningen i de to formuleringene ?

b) Gitt et deterministisk system beskrevet med modellen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, && (15) \\ y_k &= Dx_k + Eu_k. && (16) \end{aligned}$$

Anta at vi har gitt en serie med inngangs og utgangsdata

$$\left.\begin{matrix} y_k \\ u_k \end{matrix}\right\} \; k = 1, \ldots, N \tag{17}$$

Med utgangspunkt i modellen (15) og (16) kan v sette opp en matrisemodell av formen

$$Y_{1|L} = O_L X_1 + H_L^d U_{1|L} \tag{18}$$

- Sett opp utrykk for matrisene som inngår i matriseligningen (18).
- Vis hvordan vi kan estimere systemets orden, n, samt den utvidede observerbarhetsmatrisen O_L.

c) Gitt den lineære modellen

$$Y = XB + E, \tag{19}$$

der X og Y er kjente datamatriser.

Fitt et uttrykk for minste kvadraters metode estimatet, B_{OLS}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.