Eksamen i fag A2202 Systemidentifikasjon og optimal estimering onsdag 28. mai 2003

Eksamensoppgaven består av: 4 oppgaver. Det er 4 sider i eksamenssettet.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (35%): Underroms-identifikasjon

Gitt et system som kan beskrives med modellen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ce_k, \tag{1}$$

$$y_k = Dx_k + Eu_k + Fe_k \tag{2}$$

der e_k er hvit, $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = I$ og der følgende serie av utgangsdata og inngangsdata er kjent

$$\left.\begin{array}{c} y_k \\ u_k \end{array}\right\} \ \forall\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{3}$$

a) Vis at modellen i (1) og (2) med data som i (3) kan skrives som matrise-modellene

$$Y_{J|L+1} = O_{L+1} X_J + H_{L+1}^d U_{J|L+1} + H_{L+1}^s E_{J|L+1}, \tag{4}$$

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} + \tilde{C}_L E_{J|L+1}, \tag{5}$$

der J og L er to spesifiserte heltall. Du skal oppgi strukturen på matrisene som inngår i ligningene.

b) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (4) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z_{J|L} \tag{6}$$

der data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ er kjente.

Finn uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningen (6) for følgende tre tilfeller:

- et autonomt system, dvs. der $u_k = 0$ og $e_k = 0$.
- et deterministisk system, dvs. der $e_k = 0$.
- et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system.

c) Vis hvordan

- systemets orden, n
- systemets utvidede observerbarhetsmatrise O_L
- systemmatrisene A og D

kan estimeres.

d) Hva menes med begrepene

- intern balansert realisering
- utgangsnormal realisering
- inngangsnormal realisering

Oppgi evt. alternative formler til de du evt. benyttet i punkt 2b), dvs. alternative formler for O_L, A og D.

e) Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (4) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z^d_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z^d_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+1} \tag{7}$$

der data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ er kjente.

Finn uttrykk for data-matrisene $Z^d_{J+1|L}$ og $Z^d_{J|L}$ i matrise-ligningen (7). Sett også opp strukturen på matrisen $\tilde{B}_L$.

f) Vis hvordan B og E matrisene kan estimeres.

g) Skisser hvordan systemmatrisene F og C kan identifiseres.

Oppgave 2 (25%): Prediksjonsfeilmetoder

Anta at vi har en prosess

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k \tag{8}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \tag{9}$$

Videre har vi oppgitt følgende Kalman-filter struktur for den optimale prediksjonen $\bar{y}_k$ av utgangen y_k, dvs.

$$\bar{x}_{k+1} = (A - KD)\bar{x}_k + (B - KE)u_k + Ky_k, \tag{10}$$
$$\bar{y}_k = D\bar{x}_k + Eu_k, \tag{11}$$

a) Hva menes med parametervektor, θ. Gi ett eksempel på sammenhengen mellom θ og prediktoren i (10) og (11).

b) Hva menes med prediksjonsfeil, $\varepsilon_k(\theta)$.

c) Hva menes med prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi ett eksempel på ett slikt prediksjonsfeilkriterium.

d) Hvordan beregnes den optimale parametervektoren, θ^*, i en prediksjonsfeilmetode. Bare beskriv kort prinsippet.

e) Nevn en vesentlig forskjell på prediksjonsfeilmetoden og underromsbaserte metoder for systemidentifikasjon.

Oppgave 3 (20%): Tilstandsestimering

a) Gitt et system som kan beskrives med den diskrete modellen

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k, \quad (12)\\
y_k &= Dx_k + Eu_k + w_k. \quad (13)
\end{aligned}
$$

Sett opp et diskret Kalmanfilter på apriori-aposteriori form for estimering av tilstandsvektoren, x_k. Skisser også hvordan man kan finne et uttrykk for den diskrete Kalmanfilterforsterkningen.

b) Gitt et system som kan beskrives med den kontinuerlige modellen

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu + v, \quad (14)\\
y &= Dx + w. \quad (15)
\end{aligned}
$$

Sett opp et kontinuerlig Kalmanfilter for estimering av tilstandsvektoren, x.

Oppgave 4 (20%): Lineær regressjon

Gitt den lineære modellen

$$Y = XB + E, \quad (16)$$

der X og Y er kjente datamatriser.

a) Fitt et uttrykk for minste kvadraters metode estimatet, B_{OLS}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.

b)

- **PCA** Vi antar at X har redusert rang og at vi derfor ikke kan benytte minste kvadraters metode estimatet funnet i punkt a) over. Vis hvordan vi kan benytte singulærverdidekomposisjon (SVD) til å faktorisere X og dermed finne antall prinsipale komponenter (rangen til X).
- **PCR** Benytt resultatene fra PCA analysen over til å finne et prinsipal komponent regressjon (PCR) estimat, B_{PCR}, av matrisen med regressjonskoeffisienter, B.

c) Vi ønsker nå å finne et "partial least squares" (PLS) estimat av B. Sett opp et uttrykk for PLS estimatet, B_{PLS}.