Eksamen i fag PA2897
Systemidentifikasjon og prediktiv regulering
fredag 24. januar 2002

Emnedelen består av: 2 oppgaver. Det er 5 sider i eksamenssettet.
Tillatte hjelpemidler: ingen

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Institutt for prosessautomatisering
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 3 (25%): Underroms-identifikasjon

Vi antar at et gitt system kan beskrives med en tilstandsrommodell

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ce_k \quad (1)$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + Fe_k \quad (2)$$

der e_k er hvit støy med kovariansmatrise $\mathrm{E}(e_k e_k^T) = I$. En sekvens av inngangs og utgangsdata er kjent, dvs.

$$\left.\begin{array}{c} u_k \\ y_k \end{array}\right\} \ \forall \ k = 0, \ldots, N-1 \quad \text{(kjente data)} \quad (3)$$

a) Vis at systemet (1) og (2) med data som i (3) kan beskrives med en matrise-ligning av formen

$$Y_{k+1|L} = \tilde{A}_L Y_{k|L} + \tilde{B}_L U_{k|L+g} + \tilde{C}_L E_{k|L+1} \quad (4)$$

Det kreves en utledning og en beskrivelse av strukturen på matrisene som inngår i matrise-ligningen.

Med utgangspunkt i de kjente data (3) samt matriseligningen (4) er det mulig å utlede en matriseligning

$$Z_{J+1|L} = \tilde{A}_L Z_{J|L} \quad (5)$$

der data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ er kjente.

b) Finn uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningen (5) for følgende tre tilfeller:

- et autonomt system, dvs. der $u_k = 0$ og $e_k = 0$.
- et deterministisk system, dvs. der $e_k = 0$.
- et generelt (kombinert deterministisk og stokastisk) system. Tips: Sett $k = J$ i (4) og ta utgangspunkt i matrise-ligningen

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+g} + \tilde{C}_L E_{J|L+1} \quad (6)$$

og data-matrisene

$$Y_{0|J} \text{ og } U_{0|J} \quad (7)$$

c) På bakgrunn av matrise-ligningen (5) skal du vise hvordan vi kan estimere

- systemets orden n

- systemets utvidede observerbarhetsmatrise O_L
- systemets transisjonsmatrise A.

d) Anta at systemet er deterministisk slik at vi kan ta utgangspunkt i matriseligningen

$$Y_{J+1|L} = \tilde{A}_L Y_{J|L} + \tilde{B}_L U_{J|L+g} \tag{8}$$

Sett at vi har beregnet R_{ij} sub-matrisen i QR-faktoriseringen

$$\begin{bmatrix} U_{J|L+g} \\ Y_{J|L} \\ Y_{J+1|L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

og der Q_i matrisene er orthogonale slik at $Q_1 Q_1^T = I$, $Q_2 Q_2^T = I$, $Q_3 Q_3^T = I$. Videre er $Q_1 Q_2^T = 0$, $Q_1 Q_3^T = 0$ og $Q_2 Q_3^T = 0$.

Du skal nå finne uttrykk for data-matrisene $Z_{J+1|L}$ og $Z_{J|L}$ i matrise-ligningen (5) som funksjon av R_{ij} sub-matrisen i QR-faktoriseringen over. Tips: uttrykk $U_{J|L+g}$, $Y_{J|L}$ og $Y_{J+1|L}$ ved (9) og sett inn i (8). Ettermultipliser deretter (multipliser fra høyre side) med Q_2^T.

Oppgave 4 (15%): Systemidentifikasjon

Anta at vi kjenner en serie med impulsresponser, H_i, gitt ved

$$H_i = DA^{i-1}B \ \forall \ i = 1, \cdots, 2L \tag{10}$$

der A, B og D er matrisene i et dynamisk system

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, & (11) \\ y_k &= Dx_k. & (12) \end{aligned}$$

a) Velg $L = 2$ og vis at Hankelmatrisen $\mathbf{H}_{1|L}$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{H}_{1|L} = O_L C_L \tag{13}$$

der O_L er systemets utvidede observerbarhetsmatrise og C_L er systemets utvidede styrbarhetsmatrise.

b)

- Ta utgangspunkt i sammenhengen (13) i oppgave 4a) og vis hvordan O_L og C_L kan estimeres ved hjelp av singulærverdidekomposisjon.
- Hvordan kan vi nå estimere D og B ?

c) Velg $L = 2$ og vis at Hankelmatrisen $\mathbf{H}_{2|L}$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{H}_{2|L} = O_L A C_L \tag{14}$$

d)

Ta utgangspunkt i sammenhengen (14) i oppgave 4c) og vis hvordan systemmatrisen A kan estimeres.

Oppgave 5 (10%): Prediksjonsfeilmetoder

Anta at vi har en prosess

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k \tag{15}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k + w_k \tag{16}$$

Videre har vi oppgitt følgende Kalman-filter struktur for den optimale prediksjonen $\bar{y}_k$ av utgangen y_k, dvs.

$$\bar{x}_{k+1} = (A - KD)\bar{x}_k + (B - KE)u_k + Ky_k, \tag{17}$$
$$\bar{y}_k = D\bar{x}_k + Eu_k, \tag{18}$$

a) Hva menes med parametervektor, θ. Gi ett eksempel på sammenhengen mellom θ og prediktoren i (17) og (18).

b) Hva menes med prediksjonsfeil, $\varepsilon_k(\theta)$.

c) Hva menes med prediksjonsfeilkriterium, $V_N(\theta)$. Gi ett eksempel på ett slikt prediksjonsfeilkriterium.

d) Hvordan beregnes den optimale parametervektoren, θ^*, i en prediksjonsfeilmetode. Bare beskriv kort prinsippet.

e) Nevn en vesentlig forskjell på prediksjonsfeilmetoden og underromsbaserte metoder for systemidentifikasjon.